PROBABILITÉ : VARIABLES ALÉATOIRES

Un peu d'histoire :

L'histoire des probabilités contribue à la réflexion sur la codification d'une théorie scientifique. On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

I. Variable aléatoire :

1°) Définition, exemple :

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire (c'est à dire l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire).

Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque élément de Ω un nombre réel.

Exemple :

On lance deux fois une pièce équilibrée.

On considère Ω l'univers de cette expérience. $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$.

Si à chaque issue de cette expérience, on associe le nombre de « face » obtenus, alors on définit une variable aléatoire X sur Ω, elle prend les valeurs 0, 1 et 2. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

Notation :

Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire.

On note $\{X = a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur a ».

On note $\{X \leqslant a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend une valeur inférieure ou égale a ».

2°) Loi de probabilité :

Définition :

Définir la loi de probabilité associée à une variable aléatoire revient à associer à chaque valeur prise par cette variable aléatoire la probabilité correspondante.

Valeurs prises par X	x_1	x_2	…	x_n	total
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	…	p_n	1

Exemple : Vidéo capacité 1 p 345 : ici.

Retour avec la pièce.

Ω $(X) = \{0 ; 1 ; 2\}$. La loi de probabilité associée est

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Remarque :

De manière générale, la loi de probabilité de X est la fonction qui à x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.

Propriété :

La somme des probabilités de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire est égale à 1.

Autrement dit, si on note x_1 ; x_2 ; x_3 ; … ; x_n les valeurs prises par X, on a

$$P(X=x_1) + P(X=x_2) + P(X=x_3) + \ldots + P(X=x_n) = 1$$

Ou encore, plus simplement : $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

II. Paramètres d'une loi de probabilité :

1°) Espérance, variance et écart type :

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

On suppose que X prend les valeurs x_1, x_2, ……, x_n avec les probabilités respectives p_1, p_2, … , p_n (comme dans la tableau ci-dessus).

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ est l'espérance mathématique de X.

$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots\ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$ est la variance de X.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est l'écart type de X.

Remarques :

L'espérance est la valeur moyenne de de la variable aléatoire quand on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

La variance mesure la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire autour de l'espérance : plus les valeurs sont regroupées autour de l'espérance, plus la variance est petite (toujours positive), plus les valeurs sont éloignées de l'espérance, plus la variance est grande.

Exemple : vidéo capacité 2 p 347 ici.

Calculons $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ de l'expérience avec la pièce.

Rappel de la loi de probabilité :

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Donc :

$E(X) = 0\times0{,}25 + 1\times0{,}5 + 2\times0{,}25 = 1$

$V(X) = 0{,}25\times(0-1)^2 + 0{,}5\times(1-1)^2 + 0{,}25\times(2-1)^2 = 0{,}5$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exemple : Gain ou perte.

On lance un dé. On perd 2 € si on tombe sur 1 ou 2, on gagne 0,5 € si on tombe sur 3 et enfin on gagne 1€ si on tombe sur 4, 5 ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage.

Ainsi : $P(X=-2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X=0{,}5) = \frac{1}{6}$ et $P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On peut présenter cette loi de probabilité à l'aide du tableau :

X	-2	$0{,}5$	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

On a alors $E(X)=-2\times\frac{1}{3}+0{,}5\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{-4}{6}+\frac{0{,}5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0{,}5}{6}=\frac{-1}{12}$.

Ceci signifie que, sur une grand nombre de répétition de cette expérience aléatoire, le joueur perd en moyenne $\frac{1}{12}$ € par partie. Lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.

Remarque :

Lorsque l'espérance de gain de tous les joueurs est nulle, on dit que le jeu est équitable.

Exemple :

Regarder aussi les vidéos capacité 3 et 4 p 348 et 349.