LA FONCTION EXPONENTIELLE

Un peu d'histoire :

La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du XVII^{e} siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

I. Introduction et définitions :

1°) Définition :

Définition :

L'unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée la **fonction exponentielle** ; elle est notée **exp**, l'image d'un réel x sera notée $\exp(x)$ ou $\exp x$.

On a donc :

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp'(x) = \exp(x)$

Remarques :

La méthode d'Euler permet de conjecturer l'existence d'une telle solution. L'unicité est admise (on pourra éventuellement la démontrer en exercice).

2°) Propriétés :

Propriété :

La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

Démonstration :

Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) \times f(-x)$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times f'(-x) \times (-1)$;

Comme $f'(x) = f(x)$ et $f'(-x) = f(-x)$, on trouve $h'(x) = 0$. La fonction h est donc constante, et pour tout réel x, $h(x) = h(0) = f(0) \times f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$, ce qui montre que $f(x)$ ne peut pas s'annuler.

Propriété :

On vient donc aussi de démontrer que, pour tout réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, c'est-à-dire que $\exp(x)$ et $\exp(-x)$ sont des inverses.

c) Propriétés algébriques :

Propriété (formule caractéristique) :

Pour tous réels a et b, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration :

Soit $g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$. On a $g'(x) = \dfrac{\exp(a+x) \times \exp(x) - \exp(a+x) \times \exp(x)}{(\exp x)^2} = 0$.

La fonction g est donc constante et pour tout x, $g(x) = g(0) = \exp(a)$.

D'où, $\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(x)} = \exp(a)$, soit $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$.

En prenant $x = b$, on retrouve la formule à démontrer.

Corollaires :

1) Pour tout réel a, $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.

2) Quels que soient les réels a et b, $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

3) Pour tout réel a et pour tout entier relatif n, $\exp(na)=(\exp(a))^n$.

4) Pour tout réel a, $\exp(a) > 0$.

Preuves : 1) On remplace b par $-a$ dans la formule caractéristique.

2) On remplace b par $-b$ dans la formule caractéristique.

3) Pour $n > 0$, on remplace na par $a + a + a + ... + a$ et on applique la formule caractéristique.

Pour $n < 0$, on pose $p = -n$ et on revient dans le cas précédent.

4) Il suffit de remarquer que $\exp(a)=\left(\exp\left(\dfrac{a}{2}\right)\right)^2$ et qu'un carré est toujours positif ou nul. Comme $\exp(a) \neq 0$, on trouve bien $\exp(a) > 0$.

Exemple :

Voir la vidéo capacité 1 p 181.

II. La notation e^x :

1°) Le nombre e et la notation e^x :

Commençons par faire deux remarques :

- Pour tout entier naturel n, $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n$. Notons e le nombre exp (1) ($e \approx 2{,}71828$). Par conséquent $\exp(n) = e^n$. De plus, $\exp(-n)=\dfrac{1}{\exp(n)}=\dfrac{1}{e^n}=e^{-n}$.
- Les propriétés de la fonction exponentielle sont semblables à celles des puissances.

Ceci a amené les mathématiciens à adopter la notation **$\exp(x) = e^x$.**

Propriétés :

Les propriétés de la fonction exponentielle s'écrivent alors :

$e^{a+b}=e^a\times e^b$ $\qquad e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ $\qquad e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$ $\qquad e^{nx}=(e^x)^n$

2°) Lien avec les suites géométriques :

Propriété :

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.

Preuve :

Soit a un nombre réel. On a $u_n = e^{na}$, donc $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$.

(u_n) est donc bien une suite géométrique de premier terme $u_0 = e^0 = 1$ et de raison e^a.

Remarque :

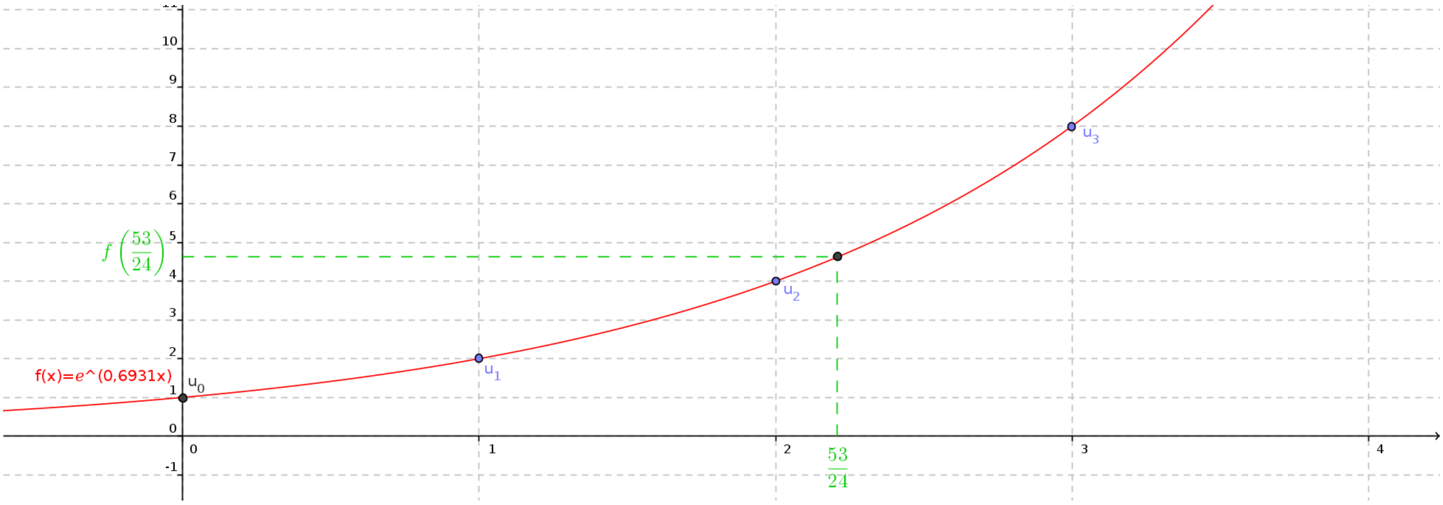
Cette propriété permet de passer du domaine discret (représenté par les suites) au domaine continu (représenté par les fonctions).

Exemple :

Des suites …

Supposons que le nombre de bactéries sur un aliment double tous les jours. Le premier jour (jour 0) une analyse montre qu'il y a 1000 bactéries sur cet aliment. Soit (u_n) la suite donnant le nombre de bactéries, en milliers, présentes sur l'aliment le jour n. On a $u_0 = 1$ et, pour tout n de ℕ, $u_{n+1} = 2u_n$. On peut aussi écrire $u_n = 2^n$.

Nous sommes dans le domaine discret, et nous pouvons calculer le nombre de bactéries présentes sur l'aliment au bout de n jours, n étant un nombre entier. Mais si nous voulons calculer le nombre de bactéries au bout de 2 jours et 5 heures, soit $2 + \frac{5}{24} = \frac{53}{24}$ jours, nous ne pouvons pas le faire.



… aux fonctions.

À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de calcul formel, on peut trouver la valeur de a telle que la fonction $f(x) = e^{ax}$ soit le « prolongement continu » de la suite (u_n). Pour cela, il faut que $f(1) = 2$, c'est-à-dire que $e^a = 2$. On trouve $a \approx 0,6931$.

La fonction $f(x) = e^{0,6931x}$ peut donc nous permettre de calculer le nombre de bactéries au bout de 2 jours et 5 heures. $f\left(\frac{53}{24}\right) = e^{0,6931 \times \frac{53}{24}} \approx 4,62$. Il y a donc environ 4 620 bactéries au bout de 2 jours et 5 heures.

Exemple 2 :

Voir la vidéo capacité 2 p 183.

Remarque (teaser) :

Vous verrez en terminale, si vous suivez la spécialité maths, un moyen très rapide de trouver le nombre a tel que la fonction $f(x) = e^{ax}$ soit le prolongement continu de toute suite géométrique.

III. Étude de la fonction exponentielle :

1°) Sens de variation :

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

Preuve :

La dérivée est e^x, elle est strictement positive sur ℝ.

Conséquences :

Quels que soient les réels a et b : $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$

Quels que soient les réels a et b : $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$

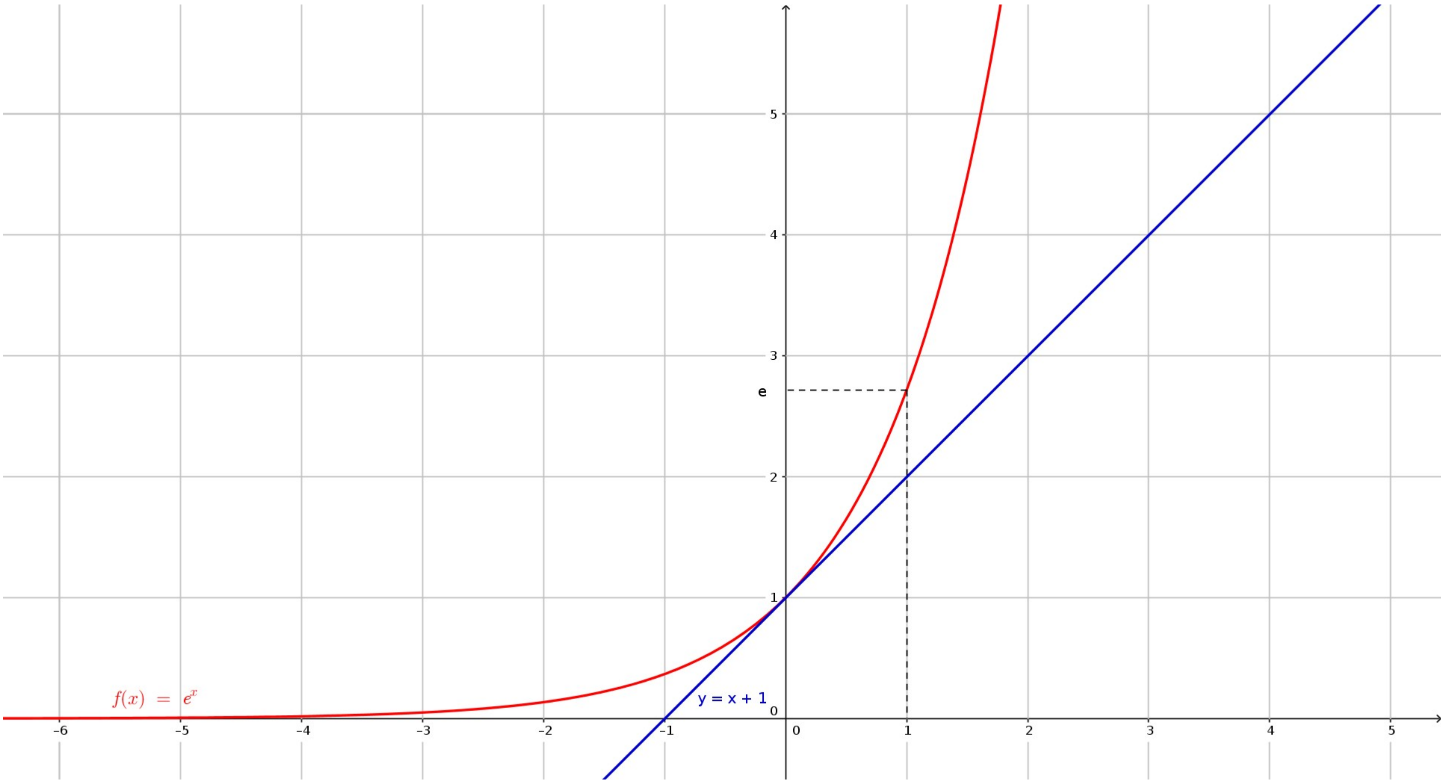
On a donc :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x) = e^x$	$+$
$f(x) = e^x$	$\nearrow$

2°) Courbe représentative :

Pour construire la courbe représentative de la fonction exponentielle on notera qu'elle passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et que la tangente en ce point a pour équation $y = x + 1$.

En effet : $e^0 = 1$ et le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est aussi $e^0 = 1$.



Exemple :

Voir la vidéo capacité 3 p 185.

IV. Fonctions de la forme x ↦ exp (ax + b) :

1°) Dérivée et sens de variation :

Propriété :

Toute fonction de la forme $f(x) = e^{ax+b}$, où a et b sont des réels, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction $f'(x) = ae^{ax+b}$.

Preuve :

$f(x) = \exp(ax + b)$ est de la forme $f(x) = g(ax + b)$ avec $g(x) = \exp(x)$, donc $g'(x) = \exp(x)$.

Donc $f'(x) = ag'(ax + b) = a\times\exp(ax + b)$.

Corollaire :

Soit $f(x) = e^{ax+b}$, où a et b sont des réels.

La fonction f est strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$.

Preuve :

Puisque $f'(x) = ae^{ax+b}$ et que $e^{ax+b} > 0$, alors f' est du signe de a.

2°) Représentation graphique des fonctions de la forme $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$ où $k > 0$:

D'après le point précédent, les fonctions de la forme $t \mapsto e^{-kt}$ où $k > 0$ sont décroissantes et les fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$ où $k > 0$ sont croissante. Elles modélisent respectivement des décroissances et des croissances exponentielles, qui sont des croissances et des décroissances très rapides.