SUITES ARITHMÉTIQUES

I. Définition :

1°) Définition :

Définition :

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant au terme précédent. Le nombre ajouté est appelé raison de la suite et est habituellement noté r.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$.

Exemples :

• La suite définie par $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison $r = 4$.

On a alors $u_1 = -3$; $u_2 = 1$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$ …

• La suite définie par $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $r = -2$.

On a alors $v_1 = 8$; $v_2 = 6$; $v_3 = 4$; $v_4 = 2$ (…)

2°) Deux façons de définir une suite arithmétique :

a) définition par récurrence :

C'est la méthode vue juste au dessus : on définit un terme de la suite en fonction de celui le précède :

$u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_1 + r$; $u_3 = u_2 + r$; $u_4 = u_3 + r$; $u_5 = u_4 + r$; … et ce jusqu'à l'infini.

Comme on ne peut pas tout écrire, on utilise cette notation $u_{n+1} = u_n + r$. Cette égalité s'appelle la relation de récurrence. On dit aussi qu'on a exprimé u_{n+1} en fonction de u_n.

Attention :

Dire comment passer d'un terme au suivant ne suffit pas pour définir une suite. Par exemple, si l'on dit juste : « on ajoute 2 pour passer d'un terme au suivant », qui s'écrit en mathématique : « $u_{n+1} = u_n + 2$ », on ne peut pas calculer les termes de la suite. Il faut impérativement également donner un nombre au départ, u_0 par exemple (ou u_1, ou u_2 …)

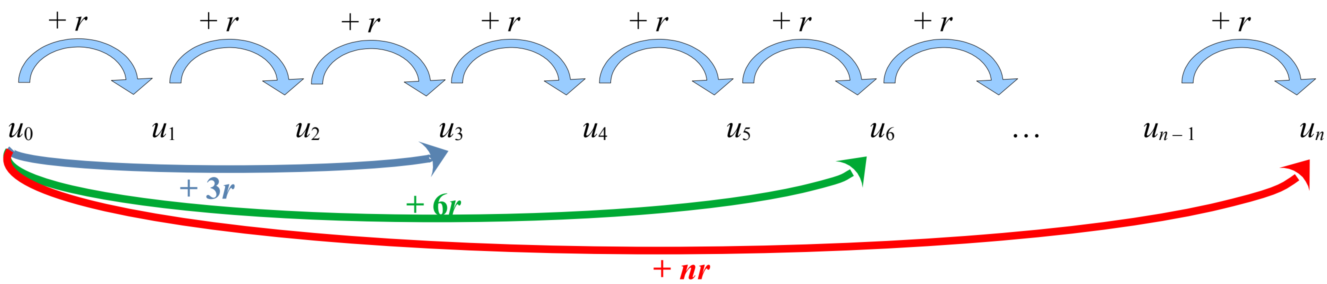
Conclusion :

Pour définir correctement une suite arithmétique par récurrence, il faut donner son premier terme et la relation de récurrence : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$. Voir les exemples ci-dessus.

Remarque :

Avec cette forme, on ne peut calculer un terme de la suite que si on connaît celui qui le précède. Par exemple, pour calculer u_{100} il faut connaître u_{99}.

2°) Formule générale :



Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1[er] terme u_0 et de raison r. Alors pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Remarques :

• On dit dans ce cas qu'on a donné la formule générale, ou explicité, ou le terme générale de la suite, ou encore qu'on a exprimé u_n en fonction de n.

• Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 + (n - 1)r$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Exemple :

Soit la suite arithmétique définie au ***I.*** par $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$. Son premier terme est –7 et sa raison est 4.

On a alors $u_n = u_0 + nr = -7 + n\times 4$, que l'on peut écrire $u_n = -7 + 4n$ ou encore $u_n = 4n - 7$.

Remarque :

Cette forme permet de calculer directement n'importe quel terme de la suite : dans l'exemple précédent, $u_{100} = -7 + 4\times 100 = 393$.

II. Représentation graphique :

Propriété :

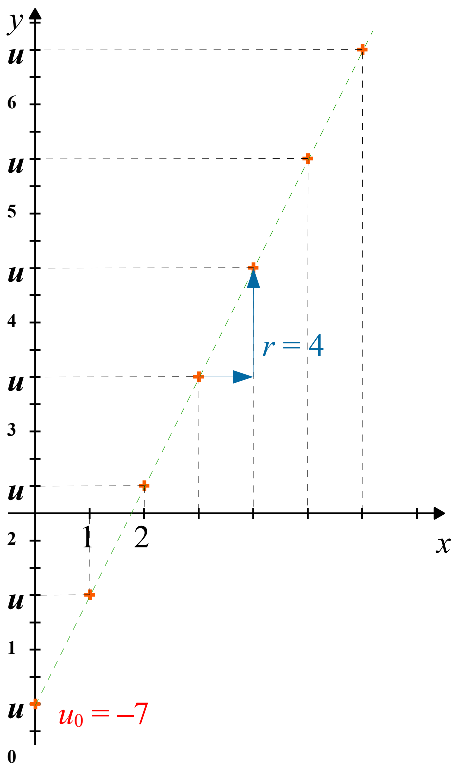
La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de point alignés sur une droite dont le coefficient directeur est la raison de la suite.

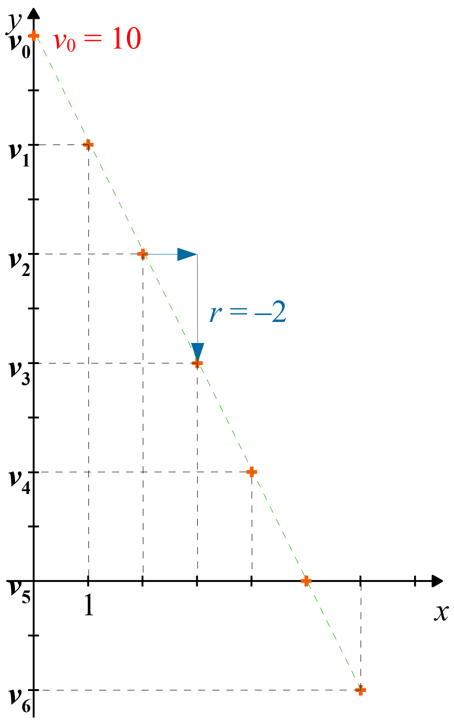
Remarque :

En effet, à chaque fois que n augmente de 1, u_n augment de r.

Exemples :

Ci-dessous les représentations graphiques des suites suites prises en exemple au ***I. 1°)***.





Remarque :

Dans le cas d'une suite arithmétique, comme les points sont alignés, on parle de croissance linéaire.

III. Sens de variation :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante ;
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;

Exemples :

Dans les exemples du ***I.* 1°)**, la suite arithmétique (u_n) qui a une raison positive (4) est strictement croissante et la suite (v_n) dont la raison est négative (–2) est décroissante.