FONCTIONS AFFINES

I. Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x - 2$ est affine.

Remarques :

Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**. Ce n'est qu'un **cas particulier** de fonction affine.

Si $a = 0$, la fonction est du type $f : x \longmapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

II. Taux de variation d'une fonction affine :

Exemple :

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x - 2$.

+8

+1 +2 +4

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10

+3 +6 +12

+24

$\times 3$

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité car le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ n'est pas constant. La fonction n'est donc pas linéaire. Par contre, le rapport $\dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ pour deux valeurs quelconques u et v est constant.

Remarque :

On dit que f est une « fonction à accroissement linéaire », c'est à dire que les accroissements des valeurs de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements des valeurs de x.

Propriété :

Si f est affine, alors l'accroissement de la fonction $(f(x_1) - f(x_2))$ est proportionnel à l'accroissement de la variable $(x_1 - x_2)$. C'est-à-dire que pour tous x_1 et x_2, $x_1 \neq x_2$: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$ est le taux de variation de la fonction (qu'elle soit affine ou pas) entre les valeurs x_1 et x_2.

Dans le cas des fonctions affines.

Ce taux de variation a est constant ;

Si a est positif, f est croissante sur $\mathbb{R}$;

Si a est négatif, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème (caractérisation d'une fonction affine) :

Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ a un taux de variation constant égal à a, alors f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ où $b = f(0)$.

III. Représentation graphique :

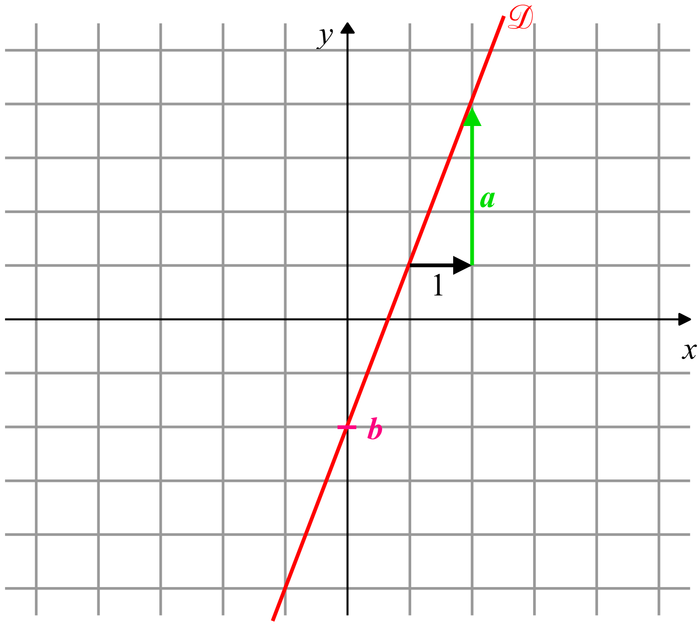
Théorème :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Et réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Propriété :

Si $\mathscr{D}$ est la droite représentant la fonction affine f définie par $f(x) = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$, a est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ et b est l'ordonnée à l'origine de d.

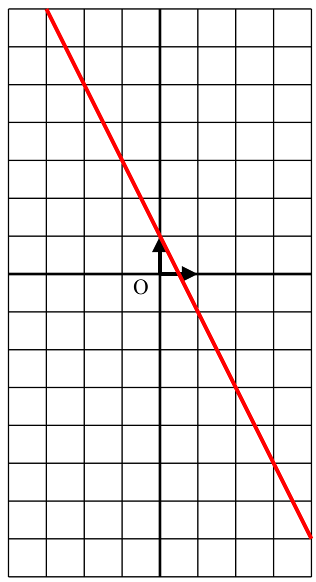


Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto -2x + 1$ admet pour représentation graphique la droit d'équation $y = -2x + 1$.

-2 est le coefficient directeur de la droite.

1 est l'ordonnée à l'origine.



Remarque :

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter aucune fonction, puisque cela signifierait qu'il existe un point qui a une infinité d'images.