

# DÉRIVATION

## I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

### 1°) Taux d'accroissement :

#### **Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux nombres de  $I$ .

On appelle taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$  le nombre  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

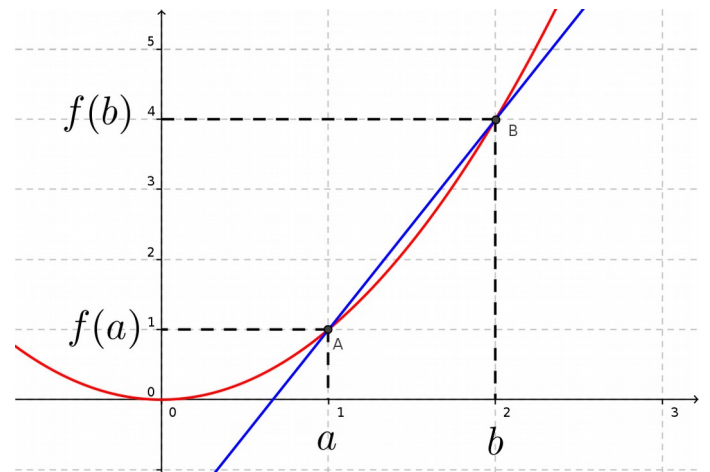
Ce nombre  $\tau$  correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec  $A(a ; f(a))$  et  $B(b ; f(b))$ .

#### **Exemple :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

Le taux de variation de la fonction  $f$  entre 1 et 2 est  $\tau = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$ . Sur le graphique ci-

contre, il correspond au coefficient directeur de la droite (AB), où  $A(1 ; 1)$  et  $B(2 ; 4)$  sont deux points de  $\mathcal{C}_f$ .



#### **Remarque :**

Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de  $a$  et  $b$ ).

#### **Exemple :**

Si  $f(x) = 3x + 5$ , le taux d'accroissement est 3.

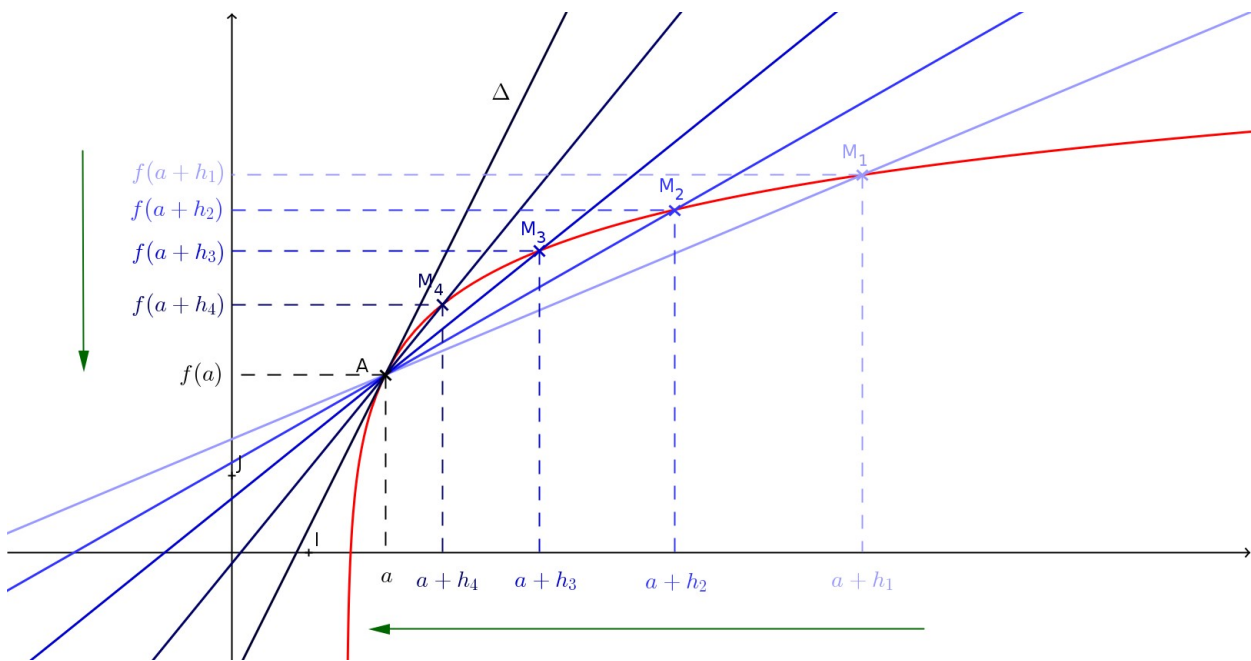
Cela signifie « quand  $x$  s'accroît de 1 unité,  $f(x)$  accroît de 3 unités ».

### 2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

#### **Définition :**

Soient  $f$  une fonction et  $\mathcal{C}_f$  sa représentation graphique. Soient  $A(a ; f(a))$  et  $M(a + h ; f(a + h))$  deux points de  $\mathcal{C}_f$ .

Le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est  $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



**Remarque :**

Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche de la tangente  $\Delta$  à  $\mathcal{C}_f$  en A, et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de  $\Delta$ .

**Définition :**

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ . On écrit

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{se lit « limite de } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ quand } h \text{ tend vers } 0).$$

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ .

**Exemple :**

Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto x^2 - x + 2$ . Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{((2+h)^2 - (2+h) + 2) - (2^2 - 2 + 2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 2 - h + 2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3.$$

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} h + 3 = 3$  donc  $f$  est dérivable en 2 et  $f'(2) = 3$ .

Exemple détaillé en vidéo : [lien](#) ou



**II. Fonctions dérivées :**

**1°) Définition :**

**Définition :**

On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à  $x$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ . Cette fonction s'appelle la dérivée de  $f$  et se note  $f'$ .

## 2°) Les fonctions dérivées à connaître :

### Propriété :

	fonction $f$	fonction $f'$
1	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
2	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
3	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$
4	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
5	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

### Preuve (pour la fonction carrée) :

$f(x) = x^2$ . Elle est définie sur  $\mathbb{R}$ . Montrons qu'elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour cela, on regarde si elle est dérivable en  $a$  (réel quelconque).  $f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2$  et  $f(a) = a^2$ .

Donc le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  est  $\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$ .  $2a$  est un nombre fini (quel que soit  $a$ ), donc la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 2a$ , et ce pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée est  $f'(x) = 2x$ .

Voir la preuve en vidéo : [ici](#) ou



jusqu'à 6 minutes :

## 3°) Opération sur les fonctions dérivables :

### Propriétés :

Dans le tableau ci-dessous,  $u$  et  $v$  sont des fonctions définies et dérivables sur un même intervalle  $I$  et  $\lambda$  est un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = 2x + 1$ .
$\lambda u$	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$ .

### Remarque :

Ces deux propriétés et les fonctions dérivées à connaître permettent de déterminer les fonctions dérivées de toutes les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

### Exemples :

Si  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 4$ , alors  $f'(x) = 9x^2 + 8x - 1$ .

Si  $g(x) = -2x^2 + 3x$ , alors  $g'(x) = -4x + 3$ .

### III. Tangente à une courbe :

#### 1°) Définition :

##### **Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et dérivable en un réel  $a$  de cet intervalle et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

On appelle tangente  $\mathcal{C}_f$  en  $a$  la droite passant par le point  $A(a; f(a))$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .

##### **Propriété :**

Le nombre dérivée de la fonction  $f$  en  $a$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ .

#### 2°) Propriété :

##### **Propriété :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et dérivable en un réel  $a$  de cet intervalle et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

La tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A(a; f(a))$  a pour équation réduite  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

##### **Preuve :**

$\mathcal{T}$  admet une équation de la forme  $y = mx + p$ , où, d'après la définition de la tangente,  $m = f'(a)$ .

$\mathcal{T}$  admet donc une équation de la forme  $y = f'(a)x + p$ .

Or,  $\mathcal{T}$  passe par  $A(a; f(a))$ , ce qui signifie  $f(a) = f'(a)a + p$ , soit  $p = f(a) - f'(a)a$ .

Ce qui nous donne  $\mathcal{T} : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$  En factorisant par  $f'(a)$  on obtient bien  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

##### **Exemple :**

Reprenons la fonction  $f$  précédente :  $f: x \mapsto x^2 - x + 2$ . Cherchons une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à sa courbe représentative au point  $A$  d'abscisse 2.

D'après la propriété,  $\mathcal{T}$  a pour équation  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ .  $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$  et  $f'(2) = 3$  d'après l'exemple précédent.

Donc  $\mathcal{T}$  a pour équation  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$  soit  $y = 3(x - 2) + 4$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2.$$

### IV. Signe de la dérivée et sens de variation :

#### 1°) Théorème :

##### **Théorème (admis) :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$ .
- $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ .

##### **Exemple :**

Soit  $f: x \mapsto x^3$ .  $f'(x) = 3x^2$  qui est positive sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

## 2°) Tableau de variations, extremum :

Lorsqu'on étudie les variations d'une fonction  $f$ , on commence par en calculer la dérivée  $f'$ , puis on étudie le signe de  $f'$ . Il est souvent utile, et intéressant visuellement, de tout récapituler dans un tableau de variation.

### Exemple :


Dressons le tableau de variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x^2 + 6x + 8$ .

1- on calcule la dérivée  $f'$  de  $f$ :  $f'(x) = -3 \times 2x + 6 = 6x + 6$ .

2- on étudie le signe de  $f'$ . Dans ce cas,  $f'$  est une fonction affine, on eut chercher quand elle est positive en résolvant  $f'(x) > 0$ :  $6x + 6 > 0$  revient à  $x > -1$ . Autrement dit,  $f'$  est positive quand  $x$  est supérieur à  $-1$

3- On récapitule toutes ces informations dans un tableau de variations en calculant les image des nombres intéressants (ceux pour lesquels le sens de variation change) :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$-1$	



Car  $f(-1) = -3 - 6 + 8 = -1$

### Propriété :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .  $f$  admet un extremum local en un point  $a$  distinct des extrémités de  $I$  si et seulement si  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

### Exemple :

La fonction  $f$  définie dans l'exemple précédent admet un minimum local pour  $x = -1$ . Nous avons bien  $f'(-1) = 0$  et  $f'$  change de signe en  $-1$

### Remarque :

Les extremums se voient très bien dès qu'on a dressé le tableau de variations.