GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I. Notion de fonction :

1°) Définition :

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble $\mathscr{D}$ le mécanisme mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de $\mathscr{D}$ un réel **unique** noté $f(x)$. On note $f : x \longmapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

2°) Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x ;
- x est l'**antécédent** de $f(x)$;
- $\mathscr{D}$ est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f.

Exemple :

Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, on définit la fonction f par : $x \longmapsto (x-1)^2 - 3$ ou $f(x) = (x-1)^2 - 3$

$f(-2) = (-2-1)^2 - 3 = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$: l'image de -2 par la fonction f est 6.

$f(-1) = (-1-1)^2 - 3 = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$: l'image de -1 par la fonction f est 1.

$f(0) = (0-1)^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: l'image de 0 par la fonction f est -2.

$f(1) = (1-1)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$: l'image de 1 par la fonction f est -3.

$f(2) = (2-1)^2 - 3 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: l'image de 2 par la fonction f est -2.

On peut dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2

Remarque :

Chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule. Certaines images peuvent avoir plusieurs antécédents. Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.

II. Représentation graphique d'une fonction :

Définition :

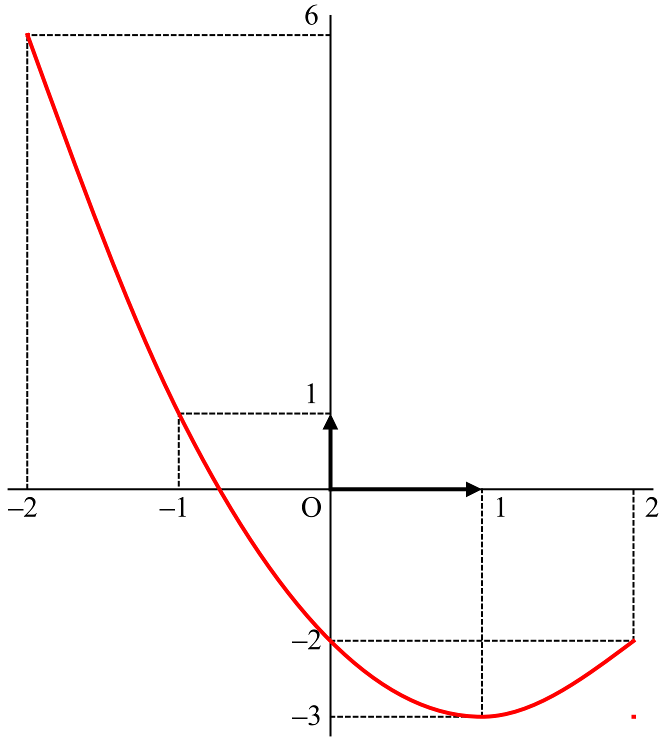
On considère le repère (O ; I, J). On appelle **représentation graphique** ou **courbe représentative** d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition $\mathscr{D}$.

Exemple :

On va représenter sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ la fonction définie par $f : x \longmapsto (x-1)^2 - 3$

On va utiliser le tableau des valeurs :

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	$f(x)$	6	1	-2	-3	-2



Remarque :

Puisque chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule, alors toute droite « verticale » a un point d'intersection et un seul avec la courbe représentative de la fonction.

On parle de la « courbe d'équation $y = (x - 1)^2 - 3$ ».

Remarque :

Lorsque l'on veut tracer la représentation graphique d'une fonction, on commence par compléter un tableau de valeur. Cela peut se faire à l'aide de la calculatrice.

III. Résolutions graphiques :

Voir fiche pratique [résolution graphique d'équations et d'inéquations].

IV. Taux de variation et sens de variation :

1°) Taux de variation :

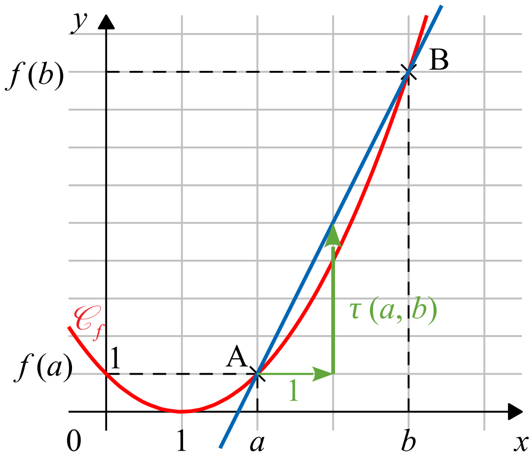
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux nombres de I.

On appelle taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre $\tau\,(a, b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

τ est une lettre grecque qui s'appelle tau.

Ce nombre $\tau\,(a, b)$ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec A $(a\,;f(a))$ et B $(b\,;f(b))$.



Exemple :

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = (x - 1)^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Le taux de variation de la fonction f entre 2 et 4 est $\tau\,(2\,;4) = \dfrac{f(4)-f(2)}{4-2} = \dfrac{9-1}{4-2} = 4$. Sur le graphique ci-contre, il correspond au coefficient directeur de la droite (AB), où A (2 ; 1) et B (4 ; 9) sont deux points de $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de a et b).

Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.

Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, $f(x)$ accroît de 3 unités ».

2°) Sens de variation :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

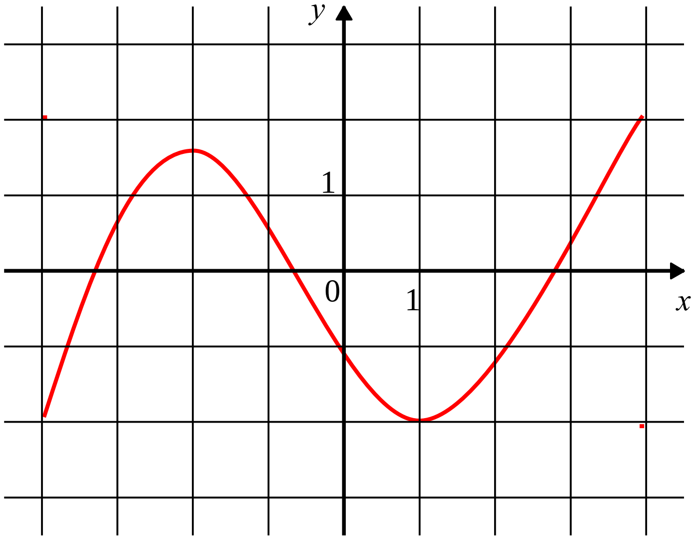
Définition :

On dit que f est **strictement croissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le même ordre que a et b, c'est-à-dire $a < b$ si et seulement si $f(a) < f(b)$. Autrement dit, quand x augmente, son image $f(x)$ augmente aussi.

On dit que f est **strictement décroissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont dans l'ordre inverse de a et b, c'est à dire $a < b$ si et seulement si $f(a) > f(b)$. Autrement dit, quand x augmente, son image $f(x)$ diminue.

Exemple :

Si l'on regarde la représentation graphique de la fonction g définie sur $[-4 ; 4]$ représentés ci-contre, on observe qu'elle est croissante sur $[-4 ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 1]$ et enfin croissante sur $[1 ; 4]$. On peut résumer tout cela dans un tableau de variations :



x	-4		-2		1		4
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$1{,}5$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Définition :

Sur un intervalle I :

- s'il existe un nombre M tel que, pour tout x de I, $f(M) \geqslant f(x)$, on dit que $f(M)$ est le **maximum** de f sur I ;
- s'il existe un nombre m tel que, pour tout x de I, $f(m) \leqslant f(x)$, on dit que $f(m)$ est le **minimum** de f sur I.

Exemple :

Pour la fonction g de l'exemple précédent, -2 est un minimum sur $]-4 ; 4[$ et 2 est un maximum sur $[-4 ; 4]$.

3°) Lien entre taux et sens de variation :

Propriété :

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.

Si pour tous réels a et b de I on a :

- $\tau(a ; b) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- $\tau(a ; b) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- $\tau(a ; b) = 0$, alors f est constante sur I.

Preuve :

• Si pour tous réels a et b de I le taux de variation entre a et b est strictement positif ça signifie que $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de même signe, et donc que, pour tous réels a et b de I, a et b sont rangés dans le même ordre que $f(a)$ et $f(b)$, f est donc strictement croissante.

• Si pour tous réels a et b de I le taux de variation entre a et b est strictement négatif ça signifie que $b - a$ et $f(b) - f(a)$ sont de signes contraires, et donc que, pour tous réels a et b de I, a et b sont rangés dans l'ordre inverse de $f(a)$ et $f(b)$, f est donc strictement décroissante.

• Si pour tous réels a et b de I le taux de variation entre a et b est nul ça signifie que $f(b) - f(a) = 0$ et donc que, pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$, f est donc constante.

Exemple :

Montrons, grâce à la propriété précédente, que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

On a donc $f(x) = x^2$. Pour tous réels positifs a et b, on a

$\tau(a ; b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{b^2-a^2}{b-a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$, qui est strictement positif puisque a et b sont strictement positifs, donc la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.