FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

I. Fonction carré (rappel) :

1°) Définition :

Définition :

Tout nombre réel a un carré.

On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

2°) Sens de variation de la fonction :

Théorème :

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$

Démonstration :

Soit a et b positifs tels que $a < b$

$a^2 < ab$ (si on multiplie par a positif)

$ab < b^2$ (si on multiplie par b positif)

Donc $a^2 < ab < b^2$

Donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$

Soit a et b négatifs tels que $a < b$

$a^2 > ab$ (si on multiplie par a négatif)

$ab > b^2$ (si on multiplie par b négatif)

Donc $a^2 > ab > b^2$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Conclusion :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3°) Courbe représentative :

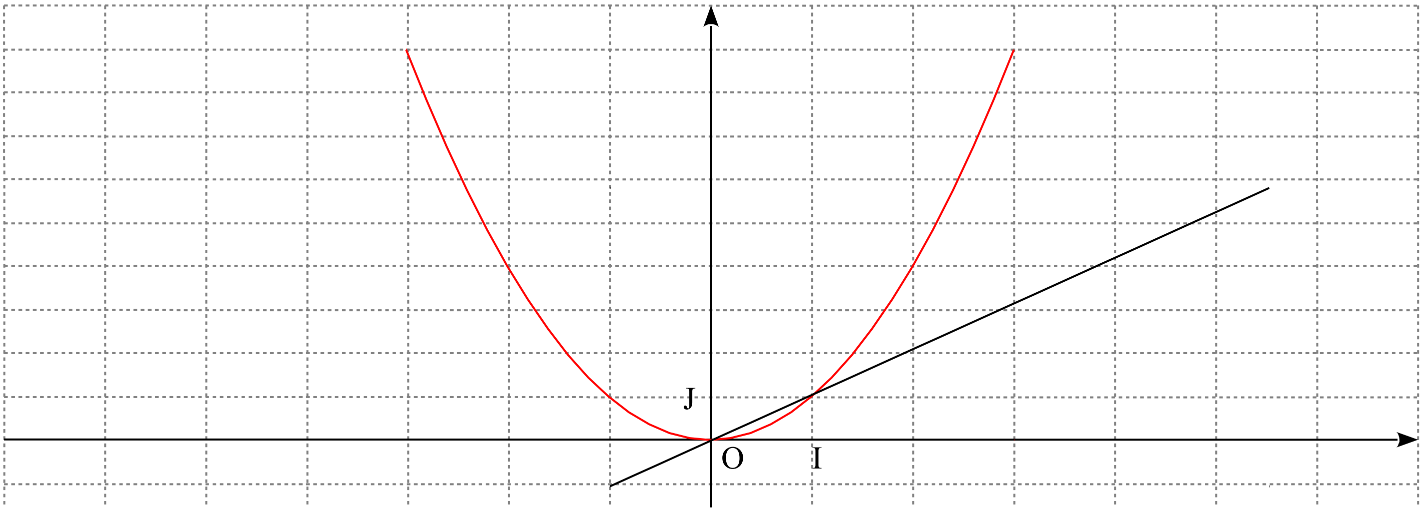
● D'après le tableau de variations, la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ admet pour minimum 0 quand x vaut 0.

● Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont la même image. Graphiquement, cela signifie que quel que soit x, les points de la courbe M(x ; $\boldsymbol{f(x)}$) et M'($-x$; $\boldsymbol{f(-x)}$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

● Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9



Cette courbe s'appelle une **parabole**. Le point O s'appelle le **sommet** de la parabole.

Remarque :

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$: la courbe est au dessous de la droite $y = x$.

Si $x > 1$, on a $x^2 > x$: la courbe est au dessus de la droite $y = x$.

3°) Non linéarité :

Propriété :

La fonction carré n'est pas une fonction affine.

Preuve :

Calculons le taux de variation τ_1 entre la première et la deuxième colonne du tableau de valeurs ci-dessus, puis τ_2, celui entre la première et la troisième colonne :

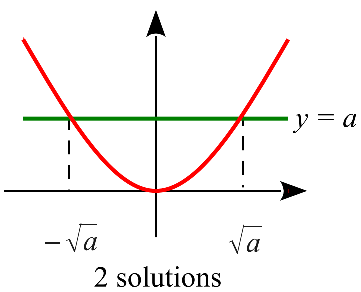
$\tau_1 = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$ et $\tau_2 = \dfrac{4-0}{2-0} = 2$. Le taux de variation n'est pas toujours le même, la fonction carré n'est donc pas affine.

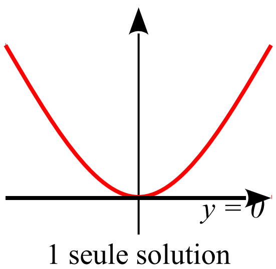
4°) Résolution des équations de la forme $x^2 = a$:

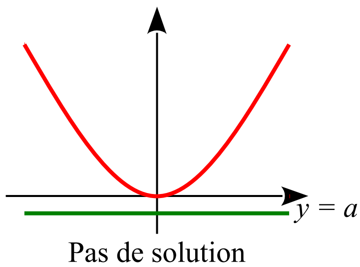
Propriété :

Dans $\mathbb{R}$, toute équation du type « $x^2 = a$ » admet :

- Si $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, une solution unique : 0
- Si $a < 0$, aucune solution.







II. Fonction polynôme de degré deux :

Définition :

On appelle fonction polynôme de degré deux toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ trois réels et } a \neq 0.$$

Exemples :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 2$; $b = -3$; $c = 5$) ;

$g(x) = x^2 - 4$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 1$; $b = 0$; $c = -4$) ;

$h(x) = x^2 + 2x$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 1$; $b = 2$; $c = 0$) ;

$i(x) = (x + 2)(3x - 2)$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 3$; $b = 4$; $c = -4$ après avoir développé) ;

$j(x) = x^2 - (x + 2)(x - 1)$ n'est pas une fonction polynôme de degré deux, car si l'on développe, les x^2 se simplifient, ce qui fait que l'on a $a = 0$. Il s'agit dans ce cas d'une fonction affine.

III. Cas particuliers où $b = 0$:

1°) Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2$ (cas $b = 0$ et $c = 0$) :

a) Définition :

Définition :

Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2$ où $a \neq 0$ sont des fonctions polynômes de degré 2 (d'après la définition ci-dessus).

b) Courbe représentative :

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$ est une parabole dont le sommet est l'origine du repère. Son ouverture est orientée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. Plus a a une valeur absolue* grande, plus la parabole est « étroite ».

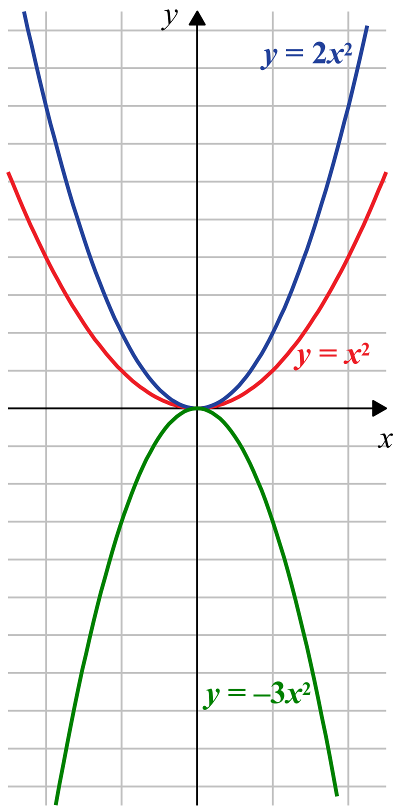
* la valeur absolue est la valeur sans le signe. Par exemple, la valeur absolue de -2 est 2.

Remarques :

- Lorsque $a = 1$, on retrouve la fonction carré étudiée en seconde.
- On a toujours $f(0) = a \times 0^2 = 0$.

Exemples :

Ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ et $h(x) = -3x^2$.



c) Sens de variation, parité :

Propriété :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$
- Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$

Remarque :

On peut résumer à l'aide des tableaux de variations suivants :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Propriété :

Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$ sont paires.

Preuve :

$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$

Remarque :

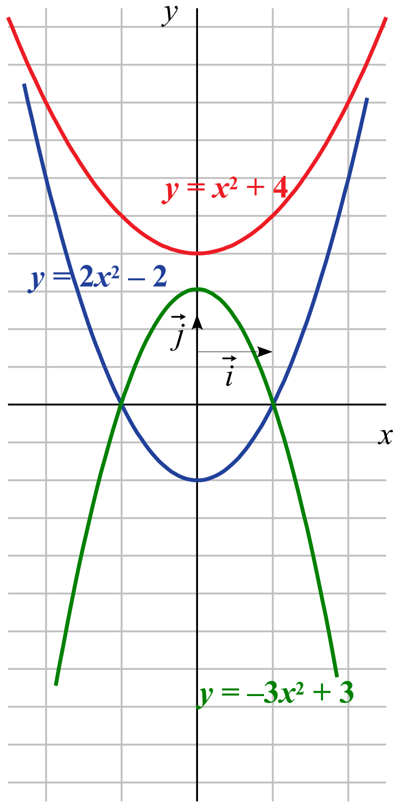
Leurs courbes représentatives est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2°) Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + c$ (cas $b = 0$ et $c \neq 0$) :

a) Définition :

Définition :

Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + c$ où $a \neq 0$ sont des fonctions polynômes de degré 2 (d'après la définition ci-dessus).



b) Courbe représentative :

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées S $(0 ; c)$ (il est sur l'axe des ordonnées). Son ouverture est orientée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. Plus a a une valeur absolue grande, plus la parabole est « étroite ».

Remarques :

• La courbe représentative d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ est obtenue par translation de la courbe représentative de fonction $g(x) = ax^2$ de vecteur $c\vec{j}$, où $\vec{j}$ est le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées.

• On a toujours $f(0) = a \times 0^2 + c = c$.

Exemples :

Ci-contre les représentations graphiques des fonctions $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = 2x^2 - 2$ et $h(x) = -3x^2 + 3$.

La courbe représentative de $f(x) = x^2 + 4$ est l'image de la parabole représentant $f_1(x) = x^2$ par la translation de vecteur $4\vec{j}$.

c) Sens de variation, parité :

Propriété :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$, avec $a \neq 0$. Son sens de variations est identique à celui de $f_1(x) = ax^2$, c'est-à-dire :

• Si $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$

• Si $a < 0$, f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$

Remarque :

On peut résumer à l'aide des tableaux de variations suivants :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	c	↗

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	c	↘

Propriété :

Les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ sont paires.

Preuve :

$f(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = f(x)$

IV. Forme factorisée :

1°) Définition :

Définition :

Certains polynômes du second degré peuvent s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 trois réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la forme factorisée, alors que la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$ s'appelle la forme développée.

Exemple :

La fonction $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ (forme développée avec $a = 2$; $b = 2$ et $c = -3$) peut également s'écrire $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ (forme factorisée avec $a = 2$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$). On peut vérifier simplement que ces deux formes sont équivalentes en développant la forme factorisée :

$2(x - 1)(x + 3) = 2(x^2 + 3x - x - 3) = 2(x^2 + 2x - 3) = 2x^2 + 4x - 6.$

Remarque :

Dans le cas où $x_1 = x_2$, on renomme souvent ces deux valeurs en x_0 et la forme factorisée s'écrit alors $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Exemple :

La fonction $f(x) = -3(x - 1)^2$ est la forme factorisée de $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$.

En effet, $-3(x - 1)^2 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3x^2 + 6x - 3$.

2°) Racines :

Définition :

Dans la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 trois réels et $a \neq 0$, x_1 et x_2 s'appellent les racines du polynôme.

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré deux factorisable, sous sa forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et $\mathscr{P}_f$ sa parabole représentative.

Les racines x_1 et x_2 du polynôme f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

La parabole $\mathscr{P}_f$ représentant f coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(x_1 ; 0)$ et $(x_2 ; 0)$.

Preuve :

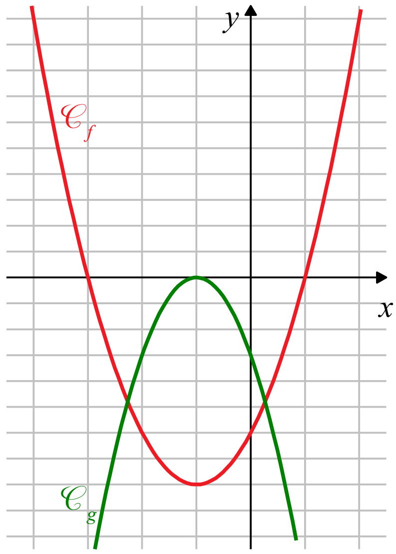
$f(x) = 0$ revient à $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Or, un produit est nul si et seulement si l'un des ses facteurs est nul. Comme $a \neq 0$, on a $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$, soit $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Ceci nous dit bien que $f(x_1) = 0$ et que $f(x_1) = 0$, donc que les points de coordonnées $(x_1 ; 0)$ et $(x_2 ; 0)$ sont sur $\mathscr{P}_f$.

Remarque :

Dans le cas où $x_1 = x_2$, on dit qu'il y a une racine double et la courbe représentant f ne coupe l'axe des abscisses qu'une seule fois.

Exemples :



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ a pour racines 1 et -3. Sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1 ; 0)$ et $(-3 ; 0)$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3(x + 1)^2$ a pour racine double 1. Sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-1 ; 0)$.

Remarque :

Si l'expression d'une fonction polynôme de degré deux n'est pas factorisable, c'est qu'elle ne possède pas de racine et que sa courbe représentative ne coupe pas l'axe des abscisses.

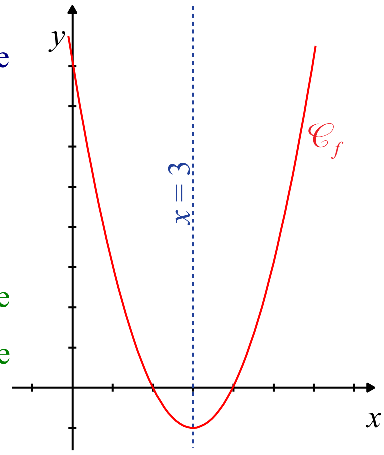
4°) Axe de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré deux factorisable, sous sa forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et $\mathscr{P}_f$ sa parabole représentative.

$\mathscr{P}_f$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ comme axe de symétrie.

Exemple :



Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)(x - 4)$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est ci-contre. Ses racines sont donc 2 et 4. $\dfrac{2+4}{2} = 3$, la droite d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

5°) Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$:

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, avec $a \neq 0$. On suppose que $x_1 \leqslant x_2$.

- Si $a > 0$, f est positive sauf sur $]x_1 ; x_2[$;
- Si $a < 0$, f est négative sauf sur $]x_1 ; x_2[$.

Exemple 1 :

Étudions le signe de $f(x) = 3(x + 1)(x + 6)$.

On a $x_1 = -1$ et $x_2 = -6$.

(on résout « $x + 1 = 0$ » et « $x + 6 = 0$ »)

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
3		+		+		+	
$x + 1$		–		–	0	+	
$x + 6$		–	0	+		+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	

Exemple 2 :

Étudions le signe de $f(x) = -2(x - 1)^2$.

On a $x_1 = x_2 = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-2		–		–	
$(x - 1)^2$		+	0	+	
$f(x)$		–	0	–	

V. Factorisation d'un trinôme du second degré :

1°) Avec les deux racines connues :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si x_1 et x_2 sont des racines de f, alors f une forme factorisée de f est : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (a est le même que dans la forme développée).

Conséquence :

Les fonctions polynômes de degré 2 s'annulant en deux réels x_1 et x_1 sont donc les fonctions qui peuvent s'écrire de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Si l'on veut déterminer a, il suffit de connaître l'image d'un autre nombre par f.

Exemple :

Question :

Quelle est la fonction polynôme de degré 2 s'annulant en –1 et 5 et pour laquelle l'image de 2 est 3 ?

Réponse :

–1 et 5 sont donc les racines de f, qui peut donc s'écrire, sous la forme factorisée, $f(x) = a(x + 1)(x - 5)$.

Nous savons de plus que $f(2) = 3$, soit $a(2 + 1)(2 - 5) = 3 \Leftrightarrow -9a = 3$, donc $a = -\frac{1}{3}$.

La fonction f cherchée est donc $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 1)(x - 5)$.

2°) Avec une racine connue :

Propriété :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Si x_1 est une racine de f, alors f peut se factoriser par $x - x_1$, c'est-à-dire que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = (x - x_1)(ax - d)$, où d est un réel (a est le même que dans la forme développée).

Exemple :

3 est une racine de $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, nous pouvons donc factoriser f sous la forme $f(x) = (x - 3)(2x + d)$. Pour déterminer d, il suffit de développer cette expression et de l'identifier à la forme développée que nous connaissons :

$f(x) = (x - 3)(2x + d) = 2x^2 + dx - 6x - 3d = 2x^2 + (\mathbf{d - 6})x - \mathbf{3d}$.

Mais on a aussi $f(x) = 2x^2 - \mathbf{4}x - \mathbf{6}$, ce qui nous permet, par identification des coefficients des deux écritures, de dire que $\mathbf{d - 6 = -4}$, ou que $\mathbf{-3d = -6}$. Dans les deux cas, on obtient $d = 2$, ce qui nous permet de dire que

$$f(x) = (x - 3)(2x + 2) = 2(x - 3)(x + 1)$$