SUITES NUMÉRIQUES

I. Généralité :

1°) Définition :

Définition :

Une suite numérique est une fonction associant à tout nombre entier naturel n, un nombre réel $u\ (n)$:

$$u : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u\ (n)$$

Ce nombre $u\ (n)$ est aussi noté u_n. La suite se note (u_n) ou $(u\ (n))$ ou simplement u. Dans la suite du cours, nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre de ces notations.

Exemple :

Soit la suite définie par $u\ (n) = 2n - 10$.

$$u_0 = u\ (0) = -10\ ;\ u_1 = u\ (1) = -8\ ;\ u_2 = u\ (2) = -6\ ;\ u_3 = u\ (3) = -4\ ;\ u_{10} = u\ (10) = 10$$

Remarques :

- Le 1[er] terme de la suite est u_0, l'indice est 0, et u_{10} est le terme d'indice 10, et c'est le 11[ème] terme de la suite.
- La suite $(v\ (n))$ (notée aussi (v_n) ou v) définie par $v\ (n) = \sqrt{n-3}$ n'est définie que pour $n \geqslant 3$. On la note $(v\ (n))_{n\geqslant 3}$ (ou $(v_n)_{n\geqslant 3}$).

2°) Suite définie par une relation fonctionnelle :

Définition :

Une suite est définie par son terme général, (ou de façon explicite, ou par une relation fonctionnelle) lorsque le terme $u\ (n)$ est exprimé en fonction de n (à la manière des fonctions, $u\ (n) = u_n = f\ (n)$).

Exemples :

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite (v_n) définie par $v_n = 0{,}5n^2 + 1$.

Remarque :

Lorsqu'une suite est définie par son terme général, on peut calculer n'importe lequel de ses termes en connaissant son indice.

3°) Suite définie par une relation de récurrence :

Définition :

Une suite est définie par récurrence lorsque l'on donne son premier terme et la relation qui relie un terme $u\ (n)$ à son suivant $u\ (n + 1)$.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \end{cases}$. On a alors $u_1 = 3$; $u_2 = 7$; $u_3 = 15$ (...)

Remarque :

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut calculer un terme qu'en connaissant son précédent.

Remarque :

Dans certaine suite définies par récurrence, un terme est parfois calculé à partir de ses deux (ou plus) précédents.

Exemple :

La célèbre suite de Fibonacci est définie ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$.

On obtient $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$ … chaque terme est la somme des deux précédents.

4°) Représentation graphique :

Définition :

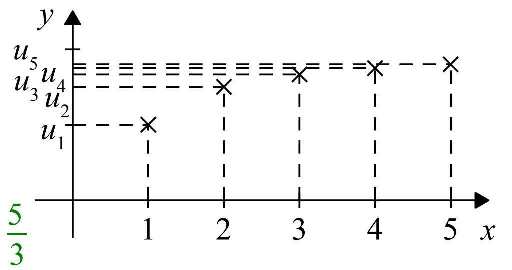
Dans un repère du plan, on appelle représentation graphique d'une suite (u_n) l'ensemble des points M_n de coordonnées $M_n(n\ ;\ u_n)$. Cette représentation graphique s'appelle un nuage de points.

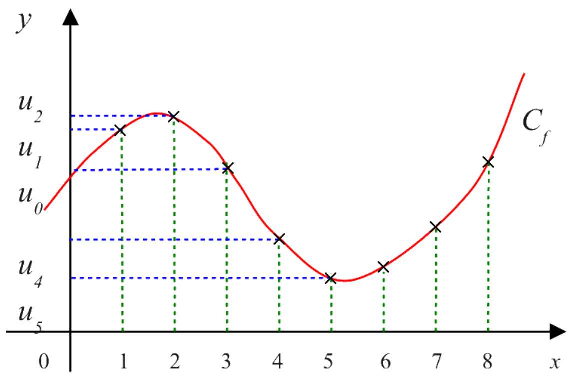
Exemple :

Soit la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.

Les premiers termes de la suite sont donc :

$u_1 = 1$; $u_2 = 1{,}5$; $u_3 = \dfrac{5}{3}$; $u_4 = 1{,}75$; $u_5 = 1{,}8$





Remarques :

• Il est important de ne pas relier les points. En effet, par une suite, seuls les nombres entiers ont des images.

• Dans le cas d'une suite définie par une relation fonctionnelle $u_n = f(n)$, le nuage de points représentant la suite est sur la courbe représentative de la fonction f.

II. Sens de variation d'une suite numérique :

1°) Définitions :

Définition :

Une suite (u_n) est croissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$:

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$$

Une suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$:

$$u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$$

Remarques :

On peut aussi dire qu'une suite est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang si les premiers termes ne vérifient pas les inégalités requises.

Si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est constante.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$. La suite (u_n) est croissante.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n-3)^2$. On obtient $u_0 = 9$; $u_1 = 4$; $u_2 = 1$; $u_3 = 0$; $u_4 = 1$; $u_5 = 4$; $u_6 = 9$; $u_7 = 16$; $u_8 = 25$ … La suite (u_n) est croissante à partir du rang 3 (il faudrait le démontrer).