FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

I. Définition :

Définition :

On appelle fonction polynôme de degré deux toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d quatre réels et $a \neq 0$.

Exemples :

La fonction cube ($x \longmapsto x^3$) étudiée en seconde est une fonction polynôme de degré 3 :
($a = 1$; $b = c = d = 0$)

$f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ est une fonction polynôme de degré 3 ($a = 2$; $b = 0$; $c = -3$; $d = 5$) ;

$g(x) = 4x^3 - 4$ est une fonction polynôme de degré 3 ($a = 4$; $b = 0$; $c = 0$ et $d = -4$) ;

$h(x) = x^2 + 2x$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 1$; $b = 2$; $c = 0$) ;

$i(x) = 3(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ est une fonction polynôme de degré 3, car i peut s'écrire

$$3(x + 2)(x - 2)(x + 1) = (x^2 - 4)(3x + 3) = 3x^3 + 3x^2 - 12x - 12.$$

($a = 3$; $b = 3$; $c = -12$ et $d = -12$ après avoir développé) ;

Remarque :

Nous n'allons étudier cette année que quelques cas particuliers des fonctions polynômes de degré 3

II. Les fonctions polynôme de degré 3 de la forme $x \mapsto ax^3 + b$:

1°) Définition :

Définition :

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^3 + b$ où a et b sont des nombres réels, $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 3.

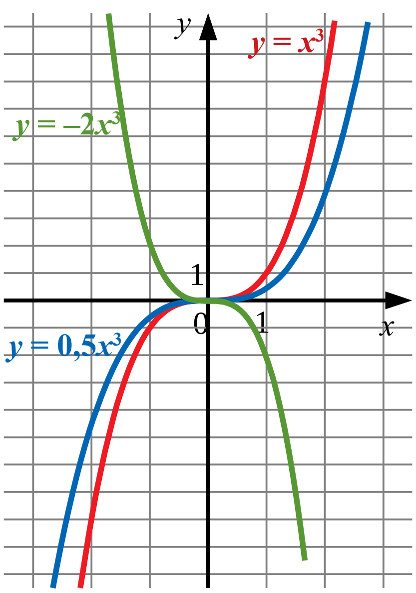
Exemples et contre exemples :

• $f(x) = -2x^3 + 5$, $g(x) = 5x^3$ et $h(x) = -7 + x^3$ sont des fonctions polynômes de degré 3 de la forme $x \mapsto ax^3 + b$.

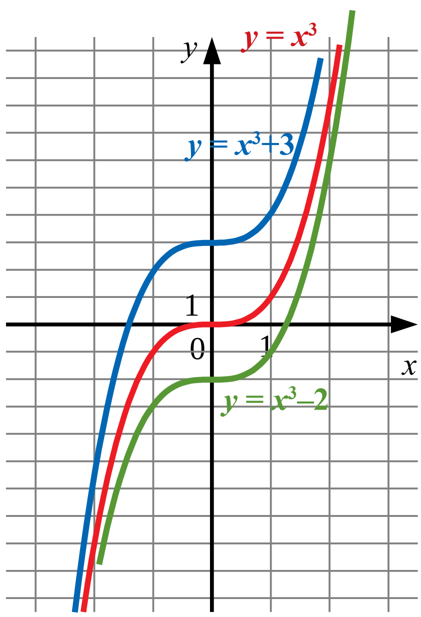
• $h(x) = 7x^5 + x^3$ n'est pas une fonction polynôme de degré 3 (mais de degré 5).

2°) Représentations graphiques :

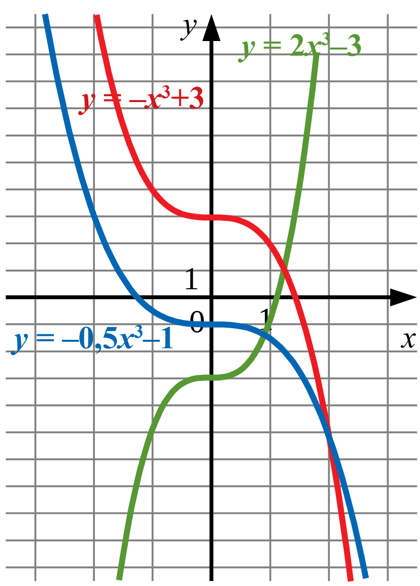
Cas $b = 0$:



Cas $a = 1$:



Cas général :



Remarques :

• La courbe qui sert de référence au départ est la courbe de la fonction cube. Toutes les autres courbes ci-dessus son obtenues à partir de cette dernière, en faisant une symétrique et/ou un « étirement ».

• dans le cas où $b = 0$, le point de coordonnées $(1 ; a)$ appartient à la courbe, car $f(1) = a\times 1^3 + 0 = a$.

3°) Sens de variation :

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^3 + b$ où a et b sont des nombres réels, $a \neq 0$. Alors :

• Si $a > 0$ la courbe est croissante sur $\mathbb{R}$.

• Si $a < 0$ la courbe est décroissante sur $\mathbb{R}$.

III. Résolution d'une équation du type $x^3 = a$:

Propriété :

Soit a un réel positif. L'équation $x^3 = a$ possède une unique solution : le nombre $\sqrt[3]{a}$ aussi noté $a^{\frac{1}{3}}$.

Remarques :

• Cette solution est appelée racine cubique de a.

• Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction cube coupe une fois et une seule la droite d'équation $y = a$.

Exemples :

La solution de $x^3 = 27$ est $\sqrt[3]{27} = 3$

Résolvons $3x^3 + 6 = 30$: $3x^3 + 6 = 30 \Leftrightarrow 3x^3 = 24 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$.

Remarque :

Sur la calculatrice TI, touche $\boxed{\text{math}}$ puis sélectionner 4 : $\sqrt[3]{}$

ou $\boxed{\wedge}$ (1/3)

IV. Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3 :

1°) définition :

Définition :

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ où a, x_1, x_2 et x_3 sont des nombres réels, $a \neq 0$, sont des fonctions polynômes de degré 3 sous la forme factorisée.

2°) Racines :

Propriété :

x_1, x_2 et x_3 sont les racines du polynôme (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$).

Preuve :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$. $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est un produit de 4 facteurs et l'un d'entre eux, a, n'est pas nul, donc ce produit est nul si et seulement l'un au moins des trois autres est nul.

Donc $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$ ou $x - x_3 = 0$; ce qui nous donne bien $x = x_1$ ou $x = x_2$ ou $x = x_3$.

Exemples :

$f(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 7)$ est une fonction polynôme de degré 3 qui a pour racines 2 ; –1 et 7. En effet, une fois développé, on obtient $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$.

Remarque :

Toutes les racines ne sont pas forcément différentes.

• Si deux des racines sont égales, on obtient une forme factorisée comme celle-ci : $2(x-4)^2(x+3)$ par exemple. Ici, $x_1 = x_2 = 4$ et $x_3 = -3$. On dit dans ce cas que 4 est une racine double.

• Si les trois racines sont égales, on obtient une forme factorisée comme celle-ci : $0{,}5(x+2)^3$ par exemple. Ici, $x_1 = x_2 = x_3 = -2$. On dit dans ce cas que –2 est une racine triple.

• Dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, on retrouve une fonction du type $f(x) = ax^3$.

3°) Représentation graphique et signe :

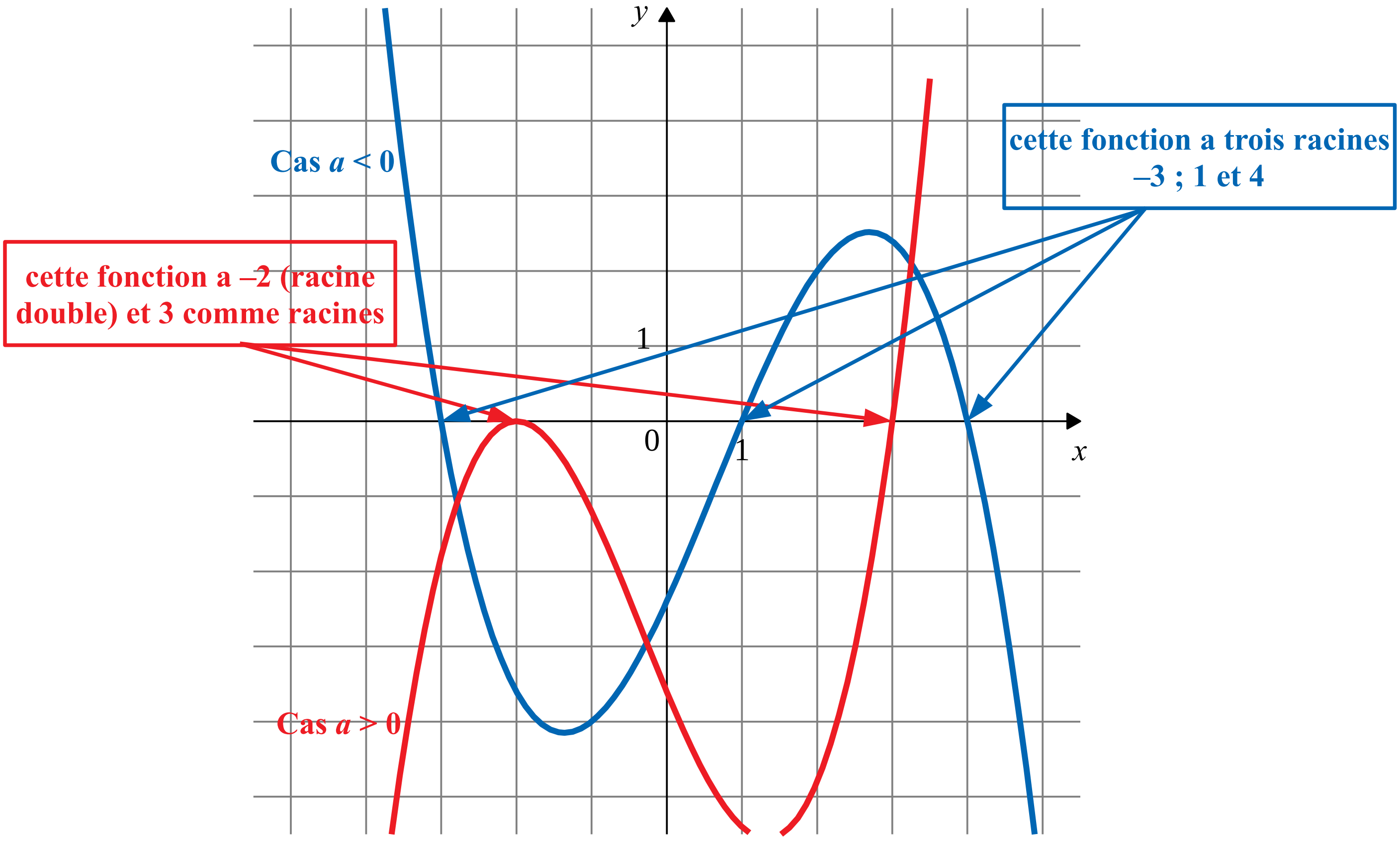
a) représentation graphique :

Propriété :

Les points d'intersections de la courbe avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x_1 ; 0)$; $(x_2 ; 0)$ et $(x_3 ; 0)$.

Preuve :

x_1, x_2 et x_3 sont les racines du polynôme, c'est-à-dire les solutions de $f(x) = 0$, ce qui signifie bien que x_1, x_2 et x_3 ont pour image 0.



b) Signe d'un polynôme de degré 3 :

Méthode :

Pour étudier le signe de la fonction polynôme définie sur ℝ par $x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ on dresse un tableau de signes.

Exemple :

La fonction représentée en bleu ci-dessus est la fonction f définie sur ℝ par

$f(x) = -0{,}2(x+2)(x-1)(x-4)$

Dressons son tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$-0,2$		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque :

La représentation graphique de la fonction f permet de vérifier les résultats obtenus avec le tableau de signes.