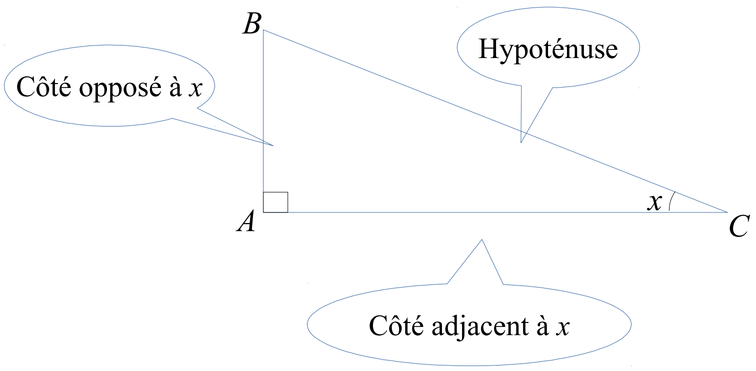
TRIGONOMÉTRIE

I. Rappels :



Dans un triangle rectangle, on peut définir les relations suivantes entre les angles aigus et les différentes longueurs des côtés.

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent (à } x\text{)}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \sin x = \frac{\text{côté opposé (à } x\text{)}}{\text{hypoténuse}} \; ; \; \tan x = \frac{\text{côté opposé (à } x\text{)}}{\text{côté adjacent (à } x\text{)}}$$

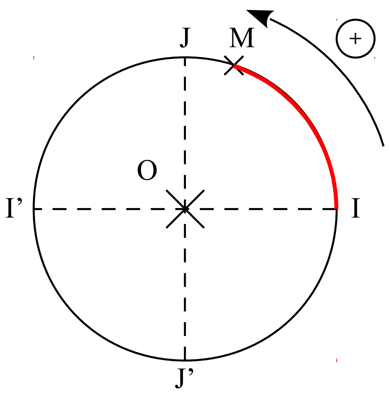
Le mot SOHCAHTOA (ou CAHSOHTOA) permet de retenir ces trois formules. Chacune des lettres correspond à l'initiale des mots formant cette formule.

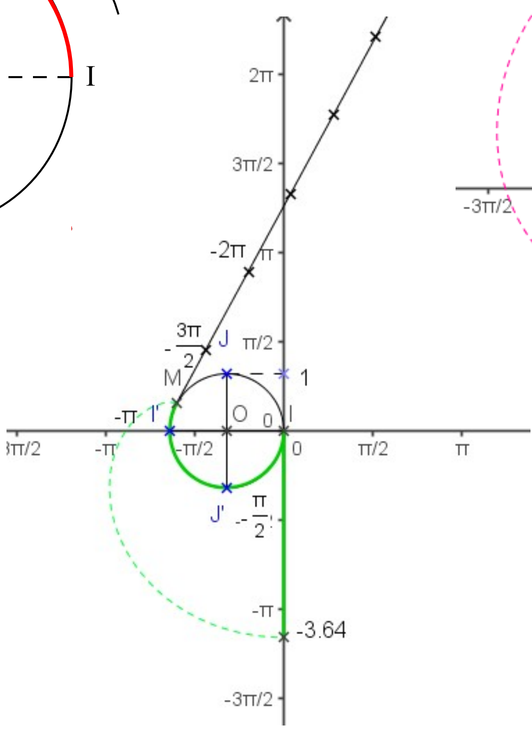
SOHCAHTOA : **S**inus = **O**pposé / **H**ypoténuse ; **C**osinus = **A**djacent / **H**ypoténuse et **T**angente = **O**pposé / **A**djacent.

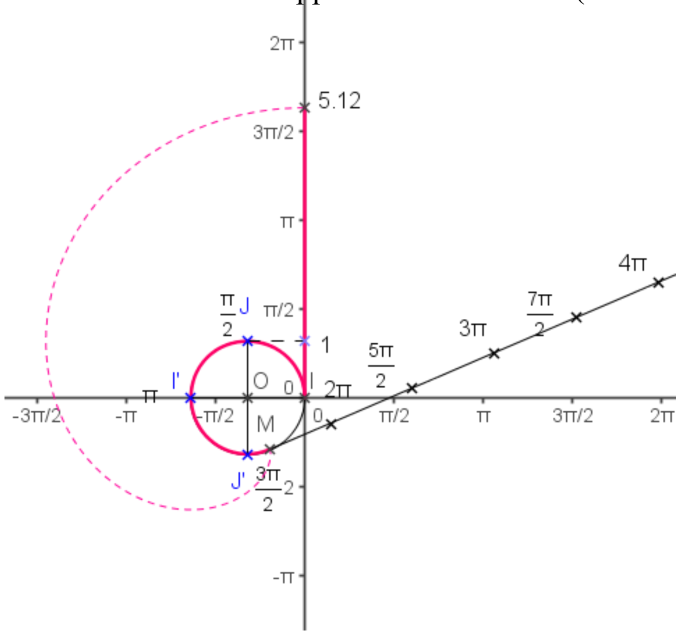
II. Le cercle trigonométrique :

1°) Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique :

On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de rayon 1 muni d'un sens appelé « sens direct » (le sens anti-horaire).







À tout réel x, on peut associer un point M sur le cercle de la façon suivante :

- si $x > 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens direct.
- si $x < 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens indirect.

La longueur de l'arc est alors x si $x > 0$ et $-x$ si $x < 0$ (C'est à dire x sans son signe).

Exemples :

La longueur totale du cercle est : $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$.

Le point J est repéré par le nombre : $\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct)

Le point J' est repéré par le nombre : $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens indirect) ou (trois quarts de tour dans le sens direct)

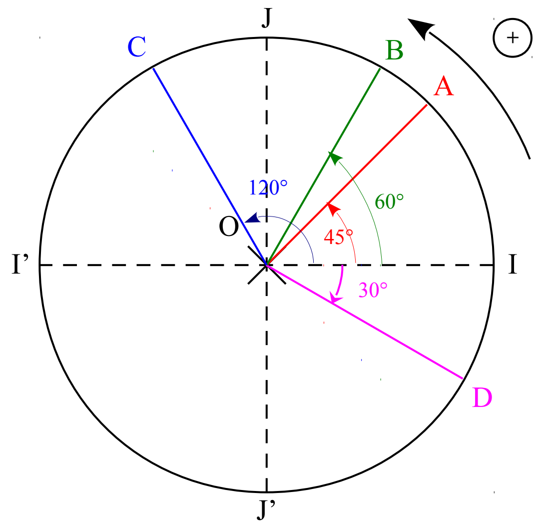
Remarque :

Tout point peut être repéré par une infinité de nombres. Par exemple A est associé aux nombres 0 (aucun tour), 2π (un tour), 4π (deux tours), -2π …

De manière générale, si le point A est repéré par le réel α, alors il est aussi repéré par tout réel de la forme $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. On peut voir k comme le nombre de tour de cercle (dans le sens positif ou dans le sens négatif) entre α et le réel $\alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

Angles	…………………….	**Longueur de l'arc**
$\widehat{IOA} = 45° = \frac{1}{8}$ de tour	……………………	$\frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$.
$\widehat{IOB} = 60° = \frac{1}{6}$ de tour	…………………….	$\frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$.
$\widehat{IOC} = 120° = \frac{1}{3}$ de tour	……………………	$\frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$.
$\widehat{IOD} = 30° = \frac{1}{12}$ de tour (sens indirect)	…	$-\frac{1}{12} \times 2\pi = -\frac{\pi}{6}$.
$\widehat{IOI'} = 180°$ = un demi-tour	………………	π



Remarque :

Les longueurs d'arcs et les mesures d'angles sont proportionnelles.

p 181 : 2 ; 4 ; 6 ; b et c des 9 ; 10 et 11

p182 : 24 ; 26

2°) Le radian, nouvelle unité de mesure d'angle :

Définition :

Le radian est une unité de mesure des angles. On note cette unité rad. La mesure d'un angle en radian est la longueur de l'arc qu'il intercepte dans le cercle trigonométrique.

Exemples :

Voici un tableau qui fait correspondre quelques valeurs d'angles en degré avec leur conversion en radian.

Angle en degrés	0	30	45	60	90	**180**	360
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π

à garder en tête pour faire des conversions

Remarque :

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

III. Angles orientés :

1°) Définition :

Définition :

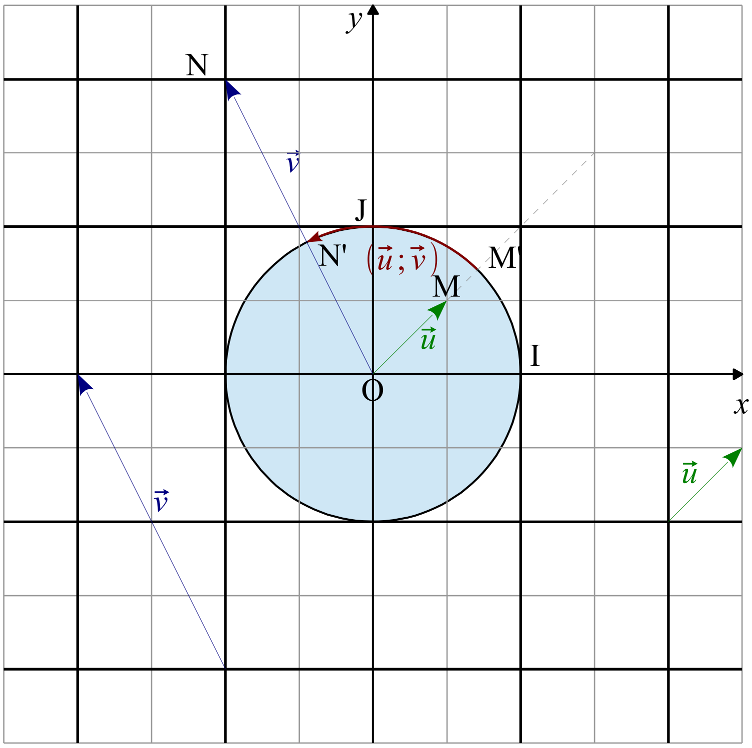
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est appelé angle orienté.

Remarque :

Il s'agit de la mesure de l'angle formé par des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ ayant la même origine. Elle est positive si on se déplace de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ dans le sens direct, négative sans cela.

Exemple :

Sur la figure ci-contre, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ des représentants respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et M et N les points d'intersection respectifs de [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique.



Dans cet exemple, on a $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{5\pi}{12}$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{19\pi}{12}$ (on soustrait 2π) ou encore $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{29\pi}{12}$ (on ajoute 2π) ou encore …

Remarques :

- On peut noter l'angle de différentes façon : $(\vec{u};\vec{v}) = (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{ON'})$.
- $(\vec{u};\vec{v})$ désigne aussi bien l'angle que sa mesure.

2°) Mesure principale :

Remarque :

Un angle orienté a une infinité de mesures. La différence entre deux mesures d'un même angle est un multiple de 2π. On dit que la mesure de l'angle est définie à 2π près et on note $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha + k \times 2\pi$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ou encore $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$ qui se lit modulo 2π.

Définition :

Parmi toutes les mesures d'un angle, une seule est comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée la mesure principale de l'angle.

Exemple :

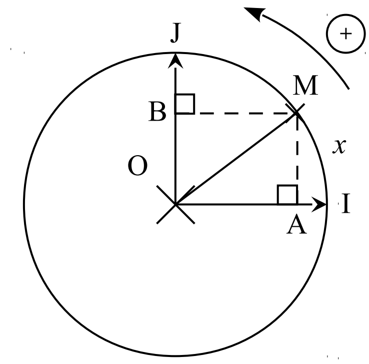
Dans l'exemple précédent, la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$ est $\frac{5\pi}{12}$.

La mesure principale de $\alpha = \frac{17\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

IV. Cosinus et sinus :

1°) Définition :

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit x la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.



Dans le triangle rectangle OAM, on a :

$\cos x = \dfrac{OA}{OM}$

$\cos x = \dfrac{OA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\cos x = OA$

donc **cos *x* est l'abscisse de M**.

De même

$\sin x = \dfrac{OB}{OM}$

$\sin x = \dfrac{OB}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\sin x = MA = OB$

donc **sin *x* est l'ordonnée de M**.

Conclusion :

Si M est le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique, alors **M (cos *x* ; sin *x*)**.

Remarques :

- Pour tout x, on a $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$;
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = cos x et AM = sin x, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$ et donc : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (on rappelle que $\cos^2 x$ est une notation qui signifie $(\cos x)^2$) ;

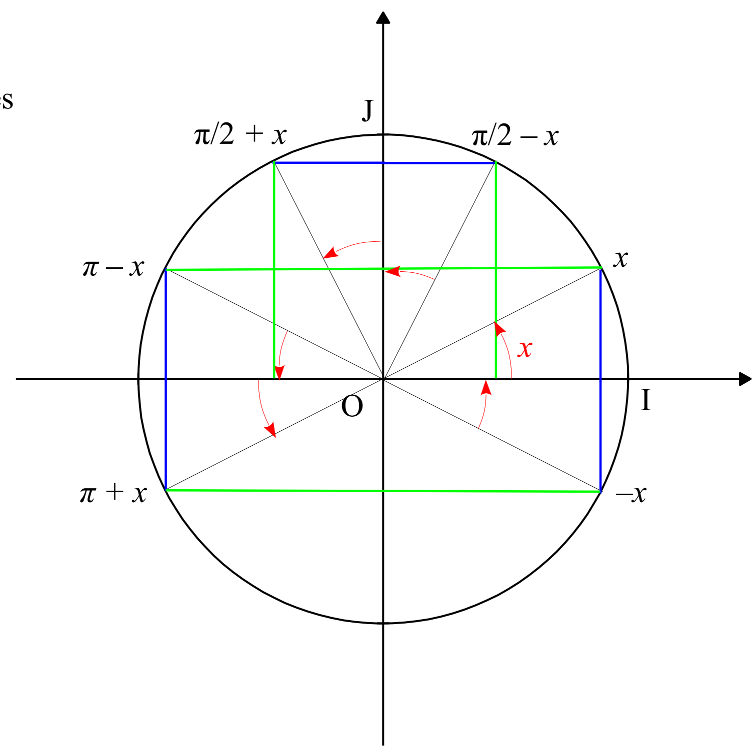
Quelques valeurs remarquables (à connaître par cœur) :

Angle	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**
Réel x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2°) Angles associés :

Définition :

Deux angles sont dits associés s'ils admettent des sinus et des cosinus égaux ou opposés.



Propriété :

Soit x un réel

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

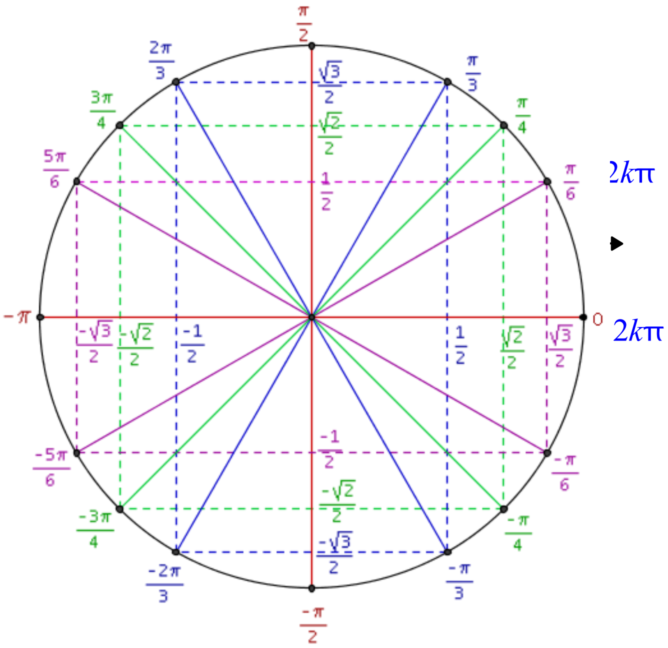
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ $\qquad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Preuve :

Par symétries illustrées sur la figure ci-contre.



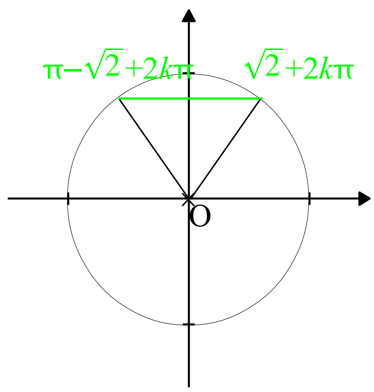
3°) Équations trigonométriques :

Propriété :

α étant un réel fixé :

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\alpha+2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\beta+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\pi-\beta+2k\pi; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$



Exemple :

a) Résolvons $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. D'après la propriété précédente $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$.

b) Résolvons $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

D'après la propriété précédente $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$.