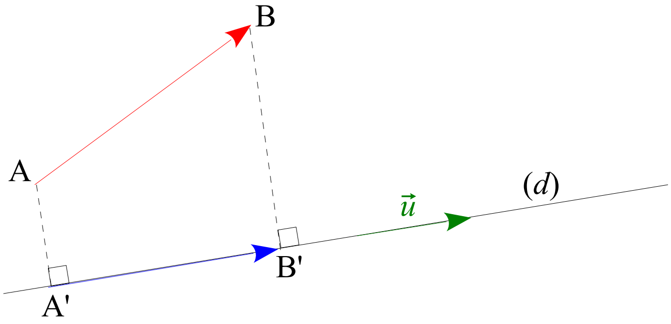
LE PRODUIT SCALAIRE

I. Définitions préalables :

1°) Projeté orthogonal d'un vecteur :

Soit une droite (d) et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur quelconque du plan. Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ tel que A' et B' sont les projetés orthogonaux respectif de A et de B sur (d) est appelé le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{AB}$ sur (d).

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), on dit aussi que $\overrightarrow{A'B'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur $\vec{u}$.



2°) Norme d'un vecteur (rappel) :

Définition :

La norme d'un vecteur est le nombre réel positif AB et est noté $\|\overrightarrow{AB}\|$. Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

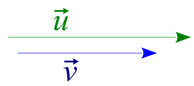
II. Produit scalaire :

1°) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition :

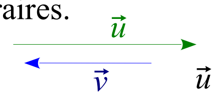
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le **nombre réel** noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ égal :

- au produit de leurs normes $\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ s'ils sont de même sens ;



$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

- à l'opposé du produit des normes $-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ s'ils sont de sens contraires.



$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Conséquences :

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$; par définition on a $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

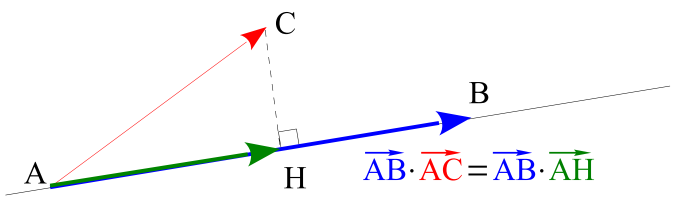
2°) Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires :

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $\overrightarrow{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

On pose par définition : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\overrightarrow{v'}$.

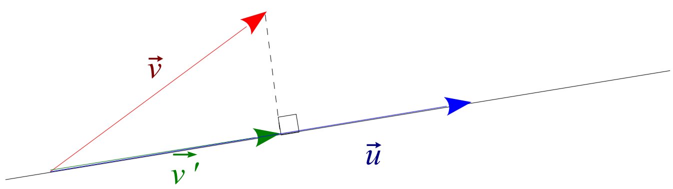
Autrement dit, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires est égal au produit scalaire entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 0.
- Sinon, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.



Démonstration :

- $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, évident.
- dans le triangle rectangle formé par $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$, $\|\vec{v}\,'\|=\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

Propriété :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$ si et seulement si $\|\vec{u}\| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$ ou $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Ce qui signifie que $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ ou $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$. CQFD.

3) Propriétés du produit scalaire :

Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le réel k, on a :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)

2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition)

3) $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (linéarité du produit scalaire)

Exemple :

Pour le 2) : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

III. Produit scalaire et géométrie analytique :

Théorème :

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormale du plan.

Si on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\,'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

On rappelle que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ équivaux à $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$;

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\,\vec{i}+y\,\vec{j})\cdot(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,\vec{i}\cdot(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j})+y\,\vec{j}\cdot(x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j})$ par distributivité à gauche

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,\vec{i}\cdot x'\,\vec{i}+x\,\vec{i}\cdot y'\,\vec{j}+y\,\vec{j}\cdot x'\,\vec{i}+y\,\vec{j}\cdot y'\,\vec{j}$ par distributivité à droite

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'(\vec{i}\cdot\vec{i})+xy'(\vec{i}\cdot\vec{j})+yx'(\vec{j}\cdot\vec{i})+yy'(\vec{j}\cdot\vec{j})$ par linéarité

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\times 1 + xy'\times 0 + yx'\times 0 + yy'\times 1$

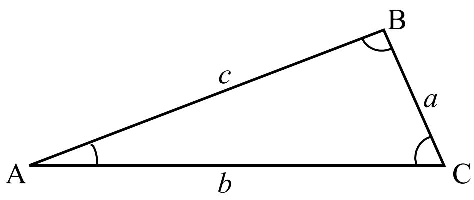
$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Corollaire :

On retrouve alors la formule de la norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = x^2 + y^2$.

IV. Formule d'Al-Kashi :

Propriété :



Soit ABC un triangle quelconque, non aplati, dont on note a = BC, b = AC et c = AB les trois longueurs des côtés (supposées donc toutes trois non nulles).

Alors : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

De même $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

Démonstration :

On a $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\,AC \times AB \times \cos(\widehat{A})$

Ainsi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

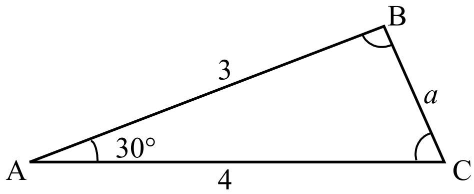
Les autres démonstrations sont identiques.

Remarque :

On appelle parfois cette relation le théorème de Pythagore généralisé, en effet :

Si le triangle est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(90)$. Or $\cos(90) = 0$ donc $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore).

Exemple :



Soit le triangle ABC ci-contre. On peut alors calculer la longueur BC :

$$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) = 4^2 + 3^2 - 2\times3\times4\times\cos(30) = 16 + 9 - 24\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 25 - 12\sqrt{3}$$

Soit BC = $\sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \approx 2{,}05$ (arrondi au centième).