

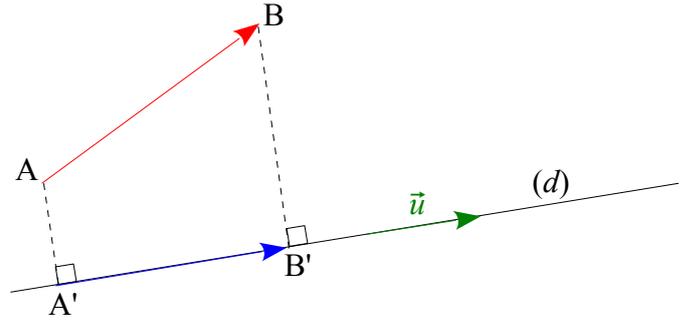
LE PRODUIT SCALAIRE

I. Définitions préalables :

1°) Projeté orthogonal d'un vecteur :

Soit une droite (d) et \vec{AB} un vecteur quelconque du plan. Le vecteur $\vec{A'B'}$ tel que A' et B' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et de B sur (d) est appelé le **projeté orthogonal** de \vec{AB} sur (d) .

Si \vec{u} est un vecteur directeur de (d) , on dit aussi que $\vec{A'B'}$ est le projeté orthogonal de \vec{AB} sur \vec{u} .



2°) Norme d'un vecteur (rappel) :

Définition :

La norme d'un vecteur est le nombre réel positif AB et est noté $\|\vec{AB}\|$. Si le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées $\vec{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $\|\vec{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II. Produit scalaire :

1°) Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs colinéaires. On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le **nombre réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égal :

- au produit de leurs normes $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de même sens ;

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \hline \vec{v} \end{array} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

- à l'opposé du produit des normes $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de sens contraires.

$$\begin{array}{c} \vec{u} \\ \hline \vec{v} \end{array} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Conséquences :

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé carré scalaire de \vec{u} et noté \vec{u}^2 ; par définition on a $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

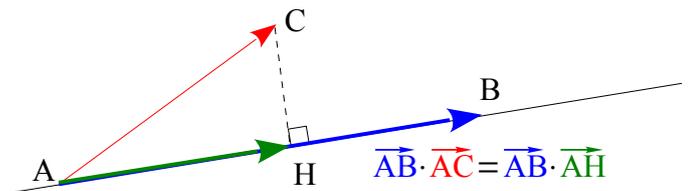
2°) Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires :

Définition :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls et \vec{v}' le projeté orthogonal de \vec{v} sur \vec{u} .

On pose par définition : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$.

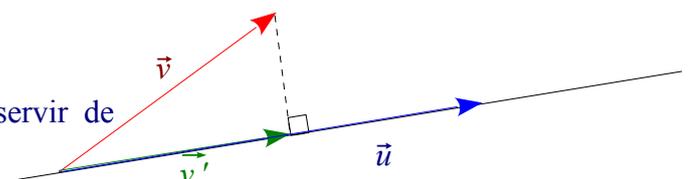
Autrement dit, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires est égal au produit scalaire entre \vec{AB} et \vec{AH} où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .



Propriété :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

- Si \vec{u} ou \vec{v} est nul, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Sinon, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$. (formule qui peut servir de définition)



Remarque :

Cette propriété peut aussi servir de définition.

Démonstration :

- \vec{u} ou \vec{v} est nul, évident.
- dans le triangle rectangle formé par \vec{v} et \vec{v}' , $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$

Propriété :

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ si et seulement si } \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0.$$

Ce qui signifie que $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ (π). CQFD.

3) Propriétés du produit scalaire :

Propriétés :

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et le réel k , on a :

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie du produit scalaire)
- 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition)
- 3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (linéarité du produit scalaire)

Exemple :

$$\text{Pour le 2) : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{CD}) = \vec{AB} \cdot \vec{AD}.$$

III. Produit scalaire et géométrie analytique :

Théorème :

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormale du plan.

Si on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration :

On rappelle que $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) équivaut à $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$;

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\vec{i} \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) + y\vec{j} \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \quad \text{par distributivité à gauche}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} \quad \text{par distributivité à droite}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}) \quad \text{par linéarité}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \times 1 + xy' \times 0 + yx' \times 0 + yy' \times 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Corollaire :

On retrouve alors la formule de la norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$.

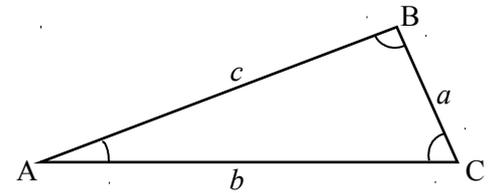
IV. Formule d'Al-Kashi :

Propriété :

Soit ABC un triangle quelconque, non aplati, dont on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ les trois longueurs des côtés (supposées donc toutes trois non nulles).

$$\text{Alors : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$\text{De même } b^2 = a^2 + c^2 - 2accos(\hat{B}) \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\hat{C}).$$



Démonstration :

$$\text{On a } BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AB}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2AC \times AB \times \cos(\hat{A})$$

$$\text{Ainsi } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\hat{A})$$

Les autres démonstrations sont identiques.

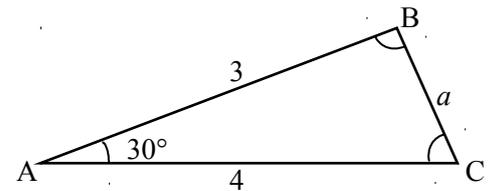
Remarque :

On appelle parfois cette relation le théorème de Pythagore généralisé, en effet :

Si le triangle est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(90)$. Or $\cos(90) = 0$ donc $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore).

Exemple :

Soit le triangle ABC ci-contre. On peut alors calculer la longueur BC :



$$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\hat{A}) = 4^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(30) = 16 + 9 - 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 - 12\sqrt{3}$$

$$\text{Soit } BC = \sqrt{25 - 12\sqrt{3}} \approx 2,05 \text{ (arrondi au centième).}$$