DÉRIVATION

I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

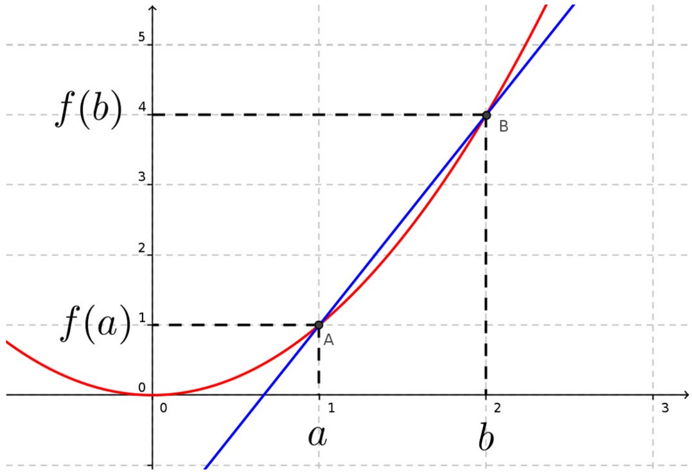
1°) Taux d'accroissement :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux nombres de I.

On appelle taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce nombre τ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec A (a ; $f(a)$) et B (b ; $f(b)$).



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 2 est $\tau = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{4-1}{2-1}=3$. Sur le graphique ci-contre, il correspond au coefficient directeur de la droite (AB), où A (1 ; 1) et B (2 ; 4) sont deux points de $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de a et b).

Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.

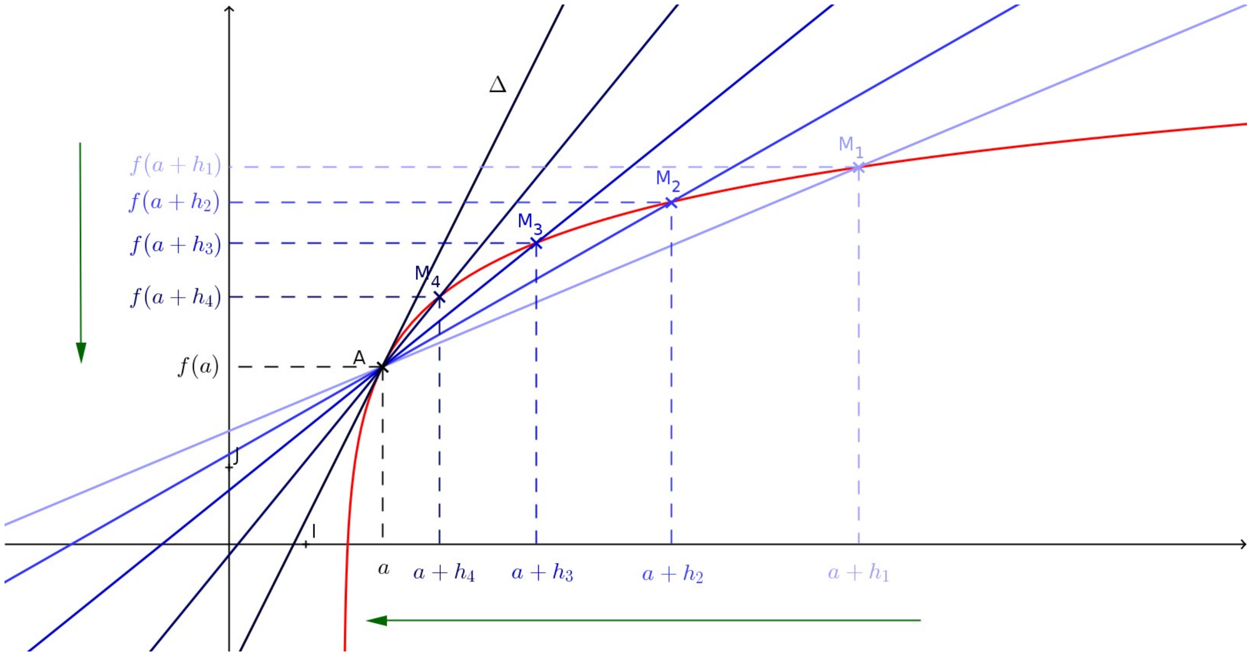
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, $f(x)$ accroît de 3 unités ».

2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

Définition :

Soient f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Soient A(a ; $f(a)$) et M ($a + h$; $f(a + h)$) deux points de $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ est $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



Remarque :

Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en A, et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de Δ.

Définition :

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$. On écrit $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (se lit « limite de $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0).

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Exemple :

Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 2$. Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{((2+h)^2 - (2+h) + 2) - (2^2 - 2 + 2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 2 - h + 2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3 \,.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} h + 3 = 3$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

Exemple détaillé en vidéo : [lien] ou

II. Fonctions dérivées :

1°) Définition :

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f'.

2°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles :

	Domaine de définition de f	fonction f	fonction f'	Domaine de définition de f'
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
9	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 7 peuvent se résumer en une seule formule :

$$\text{pour tout } n \geqslant -1, \text{ si } f(x) = x^n, \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si $n < 0$.

Exemple :

Pour la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on écrit $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ qui est de la forme x^n avec $n = -1$.

On a donc $f'(x) = nx^{n-1} = -1 \times x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Remarque :

On remarque que toutes les fonctions de référence ci-dessous sont dérivables sur leur domaine de définition.

Exemple :

Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.

3°) Opération sur les fonctions dérivables :

Propriétés :

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont des fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et λ est un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x^2 + x$ alors $f'(x) = 2x + 1$.
λu	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 3\times 2x = 6x$.

Remarque :

Ces deux propriétés et les fonctions dérivées à connaître permettent de déterminer les fonctions dérivées de toutes les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Exemples :

Si $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 4$, alors $f'(x) = 9x^2 + 8x - 1$.

Si $g(x) = -2x^2 + 3x$, alors $g'(x) = -4x + 3$.

III. Tangente à une courbe :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle tangente $\mathscr{C}_f$ en a la droite passant par le point A $(a\,; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

Le nombre dérivée de la fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

2°) Propriété :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

La tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A $(a\,; f(a))$ a pour équation réduite $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Preuve :

$\mathscr{T}$ admet une équation de la forme $y = mx + p$, où, d'après la définition de la tangente, $m = f'(a)$.

$\mathscr{T}$ admet donc une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.

Or, $\mathscr{T}$ passe par A $(a\,; f(a))$, ce qui signifie $f(a) = f'(a)a + p$, soit $p = f(a) - f'(a)a$.

Ce qui nous donne $\mathscr{T} : y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ En factorisant par $f'(a)$ on obtient bien $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

Reprenons la fonction f précédente : $f : x \longmapsto x^2 - x + 2$. Cherchons une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à sa courbe représentative au point A d'abscisse 2.

D'après la propriété, $\mathscr{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$. $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$.

Comme $f(x) = x^2 - x + 2$, alors $f'(x) = 2x - 1$, donc $f'(2) = 3$.

Donc $\mathscr{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ soit $y = 3(x - 2) + 4$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2.$$

IV. Signe de la dérivée et sens de variation :

1°) Théorème :

Théorème (admis) :

Soit f une fonction dérivable sur I.

- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$ I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in$ I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in$ I.

Exemple :

Soit $f : x \longmapsto x^3$. $f'(x) = 3x^2$ qui est positive sur $\mathbb{R}$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Tableau de variations, extremum :

Lorsqu'on étudie les variations d'une fonction f, on commence par en calculer la dérivée f', puis on étudie le signe de f'. Il est souvent utile, et intéressant visuellement, de tout récapituler dans un tableau de variation.

Exemple :

Dressons le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x + 8$.

1- on calcule la dérivée f' de f : $f'(x) = -3\times 2x + 6 = 6x + 6$.

2- on étudie le signe de f'. Dans ce cas, f' est une fonction affine, on eut chercher quand elle est positive en résolvant $f'(x) > 0$: $6x + 6 > 0$ revient à $x > -1$. Autrement dit, f' est positive quand x est supérieur à -1

3- On récapitule toutes ces informations dans un tableau de variations en calculant les image des nombres intéressants (ceux pour lesquels le sens de variation change) :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Car $f(-1) = -3 - 6 + 8 = -1$

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur I. f admet un extremum local en un point a distinct des extrémités de I si et seulement si f' s'annule en changeant de signe en a.

Exemple :

La fonction f définie dans l'exemple précédent admet un minimum local pour $x = -1$. Nous avons bien $f'(-1) = 0$ et f' change de signe en -1

Remarque :

Les extremums se voient très bien dès qu'on a dressé le tableau de variations.