DÉRIVATION

I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

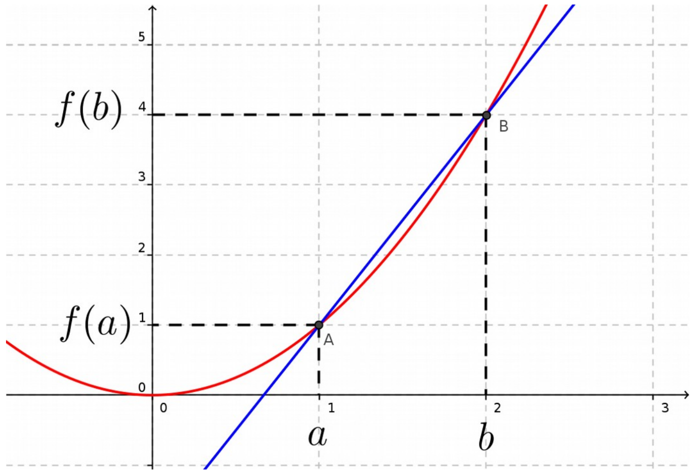
1°) Taux d'accroissement :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux nombres de I.

On appelle taux de variation de la fonction f entre a et b le nombre $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ce nombre τ correspond au coefficient directeur de la droite (AB) avec A (a ; $f(a)$) et B (b ; $f(b)$).



Exemple :

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Le taux de variation de la fonction f entre 1 et 2 est $\tau = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$. Sur le graphique ci-contre, il correspond au coefficient directeur de la droite (AB), où A (1 ; 1) et B (2 ; 4) sont deux points de $\mathscr{C}_f$.

Remarque :

Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de a et b).

Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.

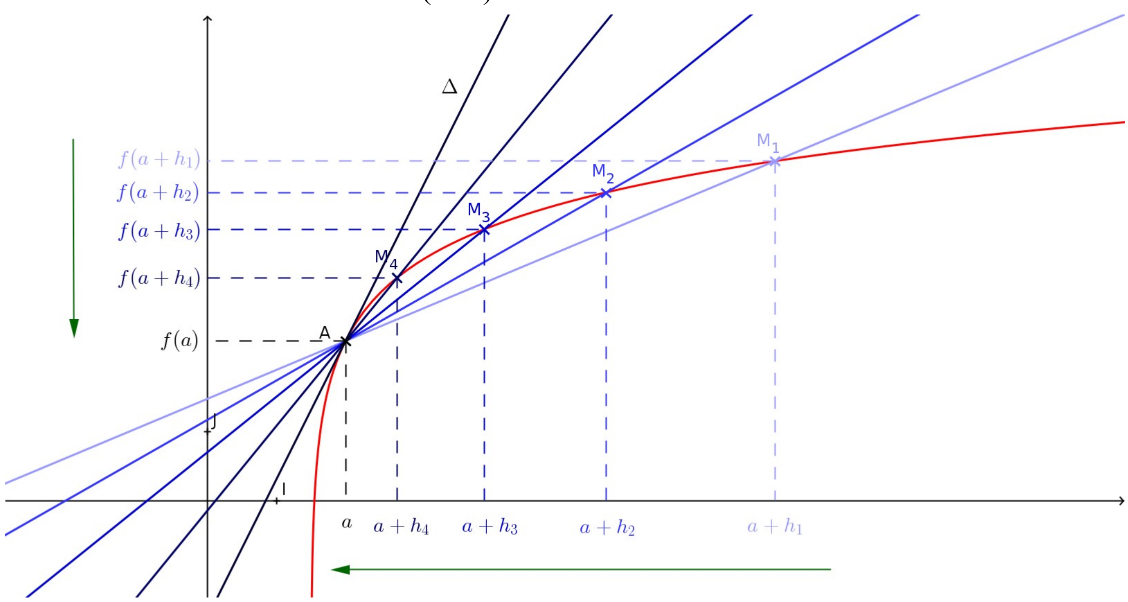
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, $f(x)$ accroît de 3 unités ».

2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

Définition :

Soient f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Soient A(a ; $f(a)$) et M ($a + h$; $f(a + h)$) deux points de $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ est $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



Remarque :

Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en A, et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de Δ.

Définition :

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$. On écrit $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (se lit « limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0).

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction f est dérivable en a.

Exemple :

Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 2$. Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{((2+h)^2-(2+h)+2)-(2^2-2+2)}{h} = \frac{4+4h+h^2-2-h+2-4}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3\,.$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} h+3 = 3$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

Exemple détaillé en vidéo : lien ou

Explication et démonstration de la formule de la tangente.

II. Tangente à une courbe :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle tangente $\mathscr{C}_f$ en a la droite passant par le point A $(a\,;f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété :

Le nombre dérivée de la fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

2°) Propriété :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

La tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point A $(a\,;f(a))$ a pour équation réduite $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Preuve :

$\mathscr{T}$ admet une équation de la forme $y = mx + p$, où, d'après la définition de la tangente, $m = f'(a)$.

$\mathscr{T}$ admet donc une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.

Or, $\mathscr{T}$ passe par A $(a\,;f(a))$, ce qui signifie $f(a) = f'(a)a + p$, soit $p = f(a) - f'(a)a$.

Ce qui nous donne $\mathscr{T}$: $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ En factorisant par $f'(a)$ on obtient bien $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple :

Reprenons la fonction f précédente : $f : x \longmapsto x^2 - x + 2$. Cherchons une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à sa courbe représentative au point A d'abscisse 2.

D'après la propriété, $\mathscr{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. $f(2) = 2^2 - 2 + 2 = 4$ et $f'(2) = 3$ d'après l'exemple précédent.

Donc $\mathscr{T}$ a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $y = 3(x-2) + 4$

$$y = 3x - 6 + 4$$

$$y = 3x - 2.$$

Avec la calculatrice :

Pour s'entraîner : Oral : 2,3 et 4 p 111, 22 p 112. Exercices 23 , 24, 25, 26 et 27 (QCM), 59, 60 et 62 p 115