VARIABLES ALÉATOIRES

I.Variable aléatoire :

1°) Définition, exemple :

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire (c'est-à-dire l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire).

Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque élément de Ω un nombre réel.

Exemple :

On lance deux fois une pièce équilibrée.

On considère Ω l'univers de cette expérience. $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$.

Si à chaque issue de cette expérience, on associe le nombre de « face » obtenus, alors on définit une variable aléatoire X sur Ω, elle prend les valeurs 0, 1 et 2. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2\}$

Notation :

Soit a un nombre réel et X une variable aléatoire.

On note $\{X = a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend la valeur a ».

On note $\{X \leqslant a\}$ l'événement « la variable aléatoire prend une valeur inférieure ou égale a ».

2°) Loi de probabilité :

Définition :

Définir la loi de probabilité associée à une variable aléatoire revient à associer à chaque valeur prise par cette variable aléatoire la probabilité correspondante.

Valeurs prises par X	x_1	x_2	…	x_n	total
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	…	p_n	1

Exemple :

Retour avec la pièce.

$\Omega\ (X) = \{0 ; 1 ; 2\}$. La loi de probabilité associée est

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Exemple vidéo :

Le lien ici ou

Remarque :

La somme des probabilités doit toujours être égale à 1.

3°) Espérance d'une variable aléatoire :

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

On suppose que X prend les valeurs x_1, x_2, ……, x_n avec les probabilités respectives p_1, p_2, … , p_n (comme dans la tableau ci-dessus).

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ est l'espérance mathématique de X.

Remarque :

L'espérance est la valeur moyenne de la variable aléatoire quand on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.

Exemple :

Calculons $E(X)$ de l'expérience avec la pièce.

Rappel de la loi de probabilité :

Valeurs prises par X	0	1	2	total
$P(X = x_i) = p_i$	0,25	0,5	0,25	1

Donc :

$E(X) = 0\times0{,}25 + 1\times0{,}5 + 2\times0{,}25 = 1$.

Ceci signifie que, sur un grand nombre de répétition de cette expérience aléatoire, on obtient en moyenne 1 « face ».

Exemple : Gain ou perte.

On lance un dé. On perd 2 € si on tombe sur 1 ou 2, on gagne 0,5 € si on tombe sur 3 et enfin on gagne 1€ si on tombe sur 4, 5 ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage.

Ainsi : $P(X = -2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(X = 0{,}5) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On peut présenter cette loi de probabilité à l'aide du tableau :

X	-2	$0{,}5$	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

On a alors $E(X) = -2\times\frac{1}{3} + 0{,}5\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{-4}{6} + \frac{0{,}5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{-0{,}5}{6} = \frac{-1}{12}$.

Ceci signifie que, sur une grand nombre de répétition de cette expérience aléatoire, le joueur perd en moyenne $\frac{1}{12}$ € par partie. Lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.

Exemple vidéo :

Calculer une espérance : le lien ici ou

Remarque :

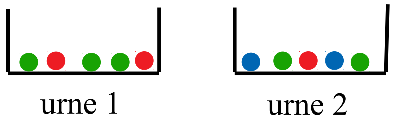
Lorsque l’espérance de gain de tous les joueurs est nulle, on dit que le jeu est équitable.

II. Expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes :

Définition :

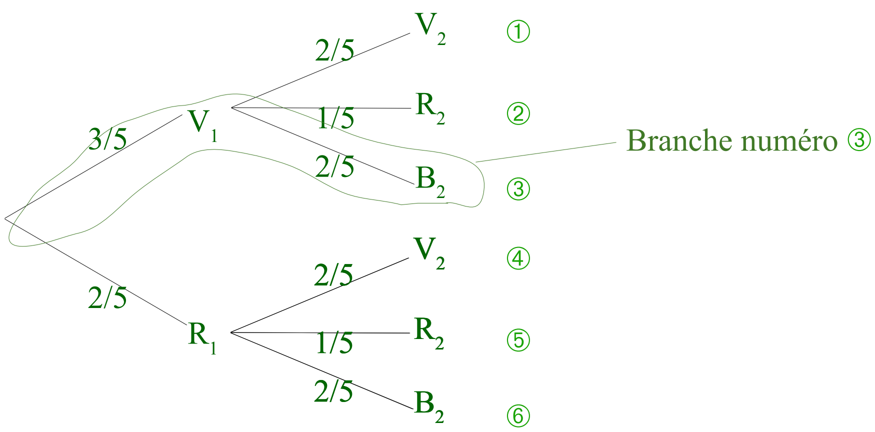
Deux expériences sont indépendantes si et seulement si le résultat de l'une n'influe pas sur celui de l'autre.

Nous allons voir comment procéder à travers un exemple : On dispose de 2 urnes contenant des boules de couleurs. La première urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. La seconde contient 1 boule rouge, 2 boules bleues et 2 boules vertes.



On pioche successivement une boule dans chacune des urnes et on relève sa couleur. On appelle respectivement V_1 et R_1 les événements « tirer une boule verte/rouge dans la première urne et V_2, R_2 et B_2 les événements « tirer une boule vert/rouge/bleue dans la deuxième urne ».

On commence par modéliser la situation par un arbre pondéré :



Dans cet arbre, chaque « branche » complète représente une issue. Par exemple, la branche ③ correspond à l'événement $V_1 \cap B_2$, c'est-à-dire « on a tiré une boule verte dans la première urne et une boule bleue dans la deuxième ».

Pour calculer la probabilité d'une branche, on multiplie les probabilités qui sont sur la branche :

$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1) \times P(B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$.

Si un événement regroupe plusieurs branches, pour en trouver la probabilité on ajoute les probabilités des branches qui le composent.

Exemple :

Soit l'événement A : « ne pas obtenir de boule rouge ». Il regroupe les branches ① et ③.

On a donc $P(A) = P(V_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap B_2)$

$= P(V_1) \times P(V_2) + P(V_1) \times P(B_2)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$.

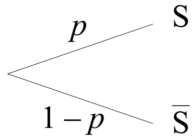
III. Schéma de Bernoulli :

1°) Épreuve de Bernoulli :

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli (ou expérience de Bernoulli) de paramètre p une expérience aléatoire qui comporte exactement deux issues :

- l'une est appelée succès, notée S, de probabilité p ;
- l'autre est appelée échec, notée E ou $\overline{S}$, de probabilité $1-p$.



Exemple :

Une question d'un QCM est composée de 4 réponses, dont une seule est correcte. On suppose qu'un élève répond totalement au hasard.

L'expérience aléatoire consistant à regarder la réponse de l'élève à la question n'est pas une épreuve de Bernoulli, car elle possède 4 issues.

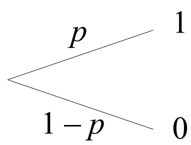
En revanche, l'expérience aléatoire consistant à regarder si la réponse est juste est une épreuve de Bernoulli. On appelle succès l'événement « répondre juste » et échec « répondre faux ».

2°) Loi de Bernoulli :

Définition :

Soit X la variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. Soit p la probabilité du succès. La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

x_i	0	1
$p\ (X = x_i)$	$1-p$	p



Exemple :

Dans l'exemple précédent, un candidat a une probabilité de répondre juste de $\frac{1}{4}$. Celle de répondre faux est donc de $\frac{3}{4}$. La loi de Bernoulli correspondant à cette expérience aléatoire a donc pour paramètre $\frac{1}{4}$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\ (p)$. On a alors $E\ (X) = p$.

Preuve :

$E\ (X) = 0(1-p) + 1\times p = p$.

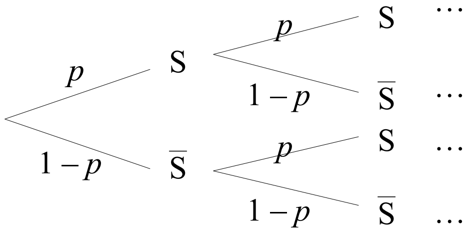
3°) Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (c'est-à-dire dans les mêmes conditions, les résultats des premières épreuves n'influant pas sur les résultats des suivantes). On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètre n (le nombre de répétitions) et p (la probabilité du succès).

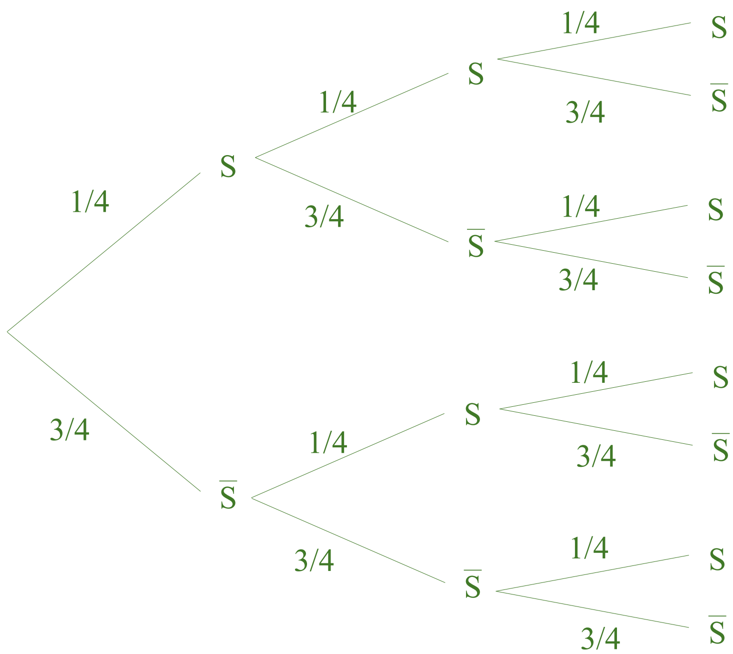
Remarque :

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une suite de n issues qui sont soit des succès, soit des échecs. Exemple : (S ; E ; S ; S ; ... ; S ; E ; E).



Exemple :

Un exercice QCM comporte 3 questions composées chacune de 4 réponses, dont une seule est correcte. On suppose qu'un élève répond totalement au hasard aux 3 questions On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$. On peut représenter les éventualités sur un arbre pondéré :



Issue	Probabilité
$(S;S;S)$	$(1/4)^3$
$(S;S;\overline{S})$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(S;\overline{S};S)$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(S;\overline{S};\overline{S})$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\overline{S};S;S)$	$(1/4)^2\times(3/4)^1$
$(\overline{S};S;\overline{S})$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\overline{S};\overline{S};S)$	$(1/4)^1\times(3/4)^2$
$(\overline{S};\overline{S};\overline{S})$	$(3/4)^3$

La probabilité que l'élève ait 2 bonnes réponses est $P = P((S;S;\overline{S})) + P((S;\overline{S};S)) + P((\overline{S};S;S))$

$$= (1/4)^2\times(3/4)^1 + (1/4)^2\times(3/4)^1 + (1/4)^2\times(3/4)^1$$

$$= 3 \times (1/4)^2\times(3/4)^1 = \frac{9}{64} \approx 0,14.$$

Exemple vidéo :

Le lien Ici ou