COMPLÉMENT SUR LA DÉRIVATION

I. Dérivées des fonctions usuelles :

1°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles (rappel et complément) :

	Domaine de définition de f	**fonction f**	**fonction f'**	**Domaine de définition de f'**
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
9	$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 7 peuvent se résumer en une seule formule :

pour tout $n \geqslant -1$, si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si $n < 0$.

Exemple :

Pour la dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, on écrit $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ qui est de la forme x^n avec $n = -1$.

On a donc $f'(x) = nx^{n-1} = -1 \times x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Remarque :

On remarque que toutes les fonctions de référence ci-dessous sont dérivable sur leur domaine de définition.

Exemple :

Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$.

2°) Opération sur les fonctions dérivables (rappel et compléments) :

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont des fonctions définies sur un même intervalle I et λ est un nombre réel.

Fonction	**Fonction dérivée**	**Exemple**
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
λu	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$.
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = (x^2 + 2)\cos(x)$ alors $f'(x) = 2x \times \cos(x) + (x^2 + 2)(-\sin(x))$.

Fonction		Fonction dérivée	Exemple
(u ne s'annule par sur I)	$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
(u ne s'annule par sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \dfrac{2(4x-4)-4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \dfrac{-20}{(4x-4)^2}$

Preuve de la dérivée de *uv* :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, telle que $f = uv$. Soit a et h deux réels tels que a et $a + h$ appartiennent à I.

Alors $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{uv(a+h)-uv(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a+h)v(a)+u(a+h)v(a)-u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a+h)v(a)}{h} + \frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)}{h}$$

$$= u(a+h)\frac{v(a+h)-v(a)}{h} + v(a)\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

Comme u et v sont dérivables, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(x)$.

De plus $\displaystyle\lim_{h\to 0} u(a+h) = u(a)$.

On a donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \tau_a(h) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$.

donc $f = uv$ est dérivable et $f' = u'v + uv'$.

Exemple (modèle de rédaction) :

Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Nous voulons dériver f.

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 6$ et $v(x) = x - 1$,

donc $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = 1$

Donc $f' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, donc $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

3°) Dérivée de $g(ax + b)$:

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie et dérivable sur J telles que $f(x) = g(ax + b)$, où a et b sont des réels tels que $ax + b \in$ J.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = ag'(ax + b)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x + 2)$.

$f(x) = g(ax + b)$, avec $g(x) = \cos(x)$ et $ax + b = 3x + 2$. Donc $a = 3$, et $g'(x) = -\sin(x)$.

alors $f'(x) = ag'(ax + b) = a \times (-\sin(ax + b)) = -3\sin(3x + 2)$.