NOMBRES COMPLEXES

I. Forme algébrique d'un nombre complexe :

1°) Le nombre i :

Le nombre i est un nombre dont le carré vaut -1. $i^2 = -1$. De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = [(-i) \times (-i)] = i^2 = -1$

Les deux nombres qui ont pour carré -1 sont donc les deux nombres i et $-$i (i comme imaginaire).

2°) Forme algébrique :

Définition :

On appelle nombre complexe z tout nombre de la forme $a + ib$, a et b étant des réels.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$. Il contient $\mathbb{R}$.

Chaque élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$, a et b étant des réels.

- a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$;
- b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

Nombres particuliers :

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est donc réel ;
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur.

Exemple :

Voici les parties réelle a et imaginaire b de différents nombres complexes :

• $z = 2 + 3i$	$a = 2$	$b = 3$	
• $z = -1 + \frac{1}{2}\,i$	$a = -1$	$b = \frac{1}{2}$	
• $z = -i$	$a = 0$	$b = -1$	$-$i est un imaginaire pur.
• $z = \pi$	$a = \pi$	$b = 0$	π est un réel
• $z = 4i - \frac{1}{3}$	$a = -\frac{1}{3}$	$b = 4$	

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ alors $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

II. Opérations sur les nombres complexes :

1°) Conjugué :

Définition :

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\bar{z} = a - ib$.

Exemple :

- Le conjugué de $z = 2 + 3i$ est $\bar{z} = 2 - 3i$.
- Le conjugué de $z = \pi$ est $\bar{z} = \pi$.
- Le conjugué de $z = -1 + \frac{1}{2}\,i$ est $\bar{z} = -1 - \frac{1}{2}\,i$.
- Le conjugué de $z = 4i - \frac{1}{3}$ est $\bar{z} = -4i - \frac{1}{3}$.
- Le conjugué de $z = -i$ est $\bar{z} = i$.

2°) Addition et multiplication :

On définit dans $\mathbb{C}$ deux opérations appelées addition et multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$. On remplace simplement i^2 par -1 quand on le rencontre.

Exemple :

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculons et écrivons sous la forme algébrique:

$z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$

$z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$

$2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i$

$zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + \mathbf{3i^2} - 15i = 2i - 10 \mathbf{- 3} - 15i = -13 - 13i$

$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + \mathbf{(3i)^2} = 4 + 12i + \mathbf{9i^2} = 4 + 12i \mathbf{- 9} = -5 + 12i$

Remarque :

Le i s'obtient en tapant $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{.}$ sur la calculatrice TI 82 ou 83, et c'est la touche juste au dessus de π sur la numworks.

3°) Inverse, division :

a) Inverse d'un nombre complexe :

Propriété :

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on a $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Preuve :

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ qui est un nombre réel.

Propriété :

Ainsi, on a : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

C'est à dire que tout nombre complexes z non nul admet un inverse noté $\dfrac{1}{z}$.

Exemple :

L'inverse de $z = 1 + i$ est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1 \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)} = \dfrac{1 - i}{1^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

b) Division :

Méthode :

Si z et z' sont deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$, alors, pour calculer $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique on utilise $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}}$.

Exemple :

$$\frac{1+2i}{2+3i} = \frac{(1+2i)\times(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2} = \frac{2-7i+6}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

III. Représentation graphique :

1°) Affixe d'un point, point image :

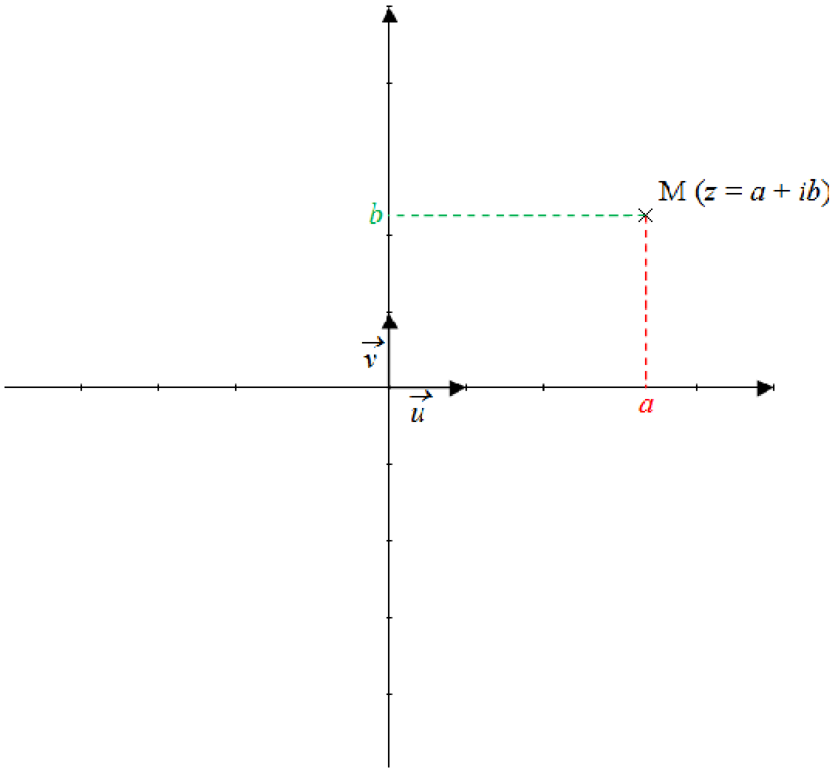
Définition :

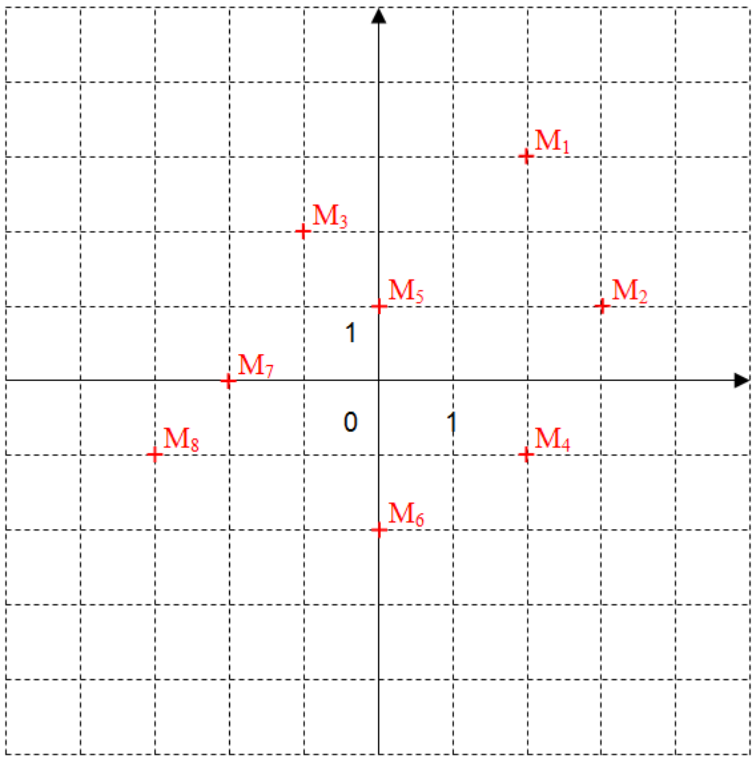
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$

- Au point M de coordonnées (a ; b) on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que z est l'affixe du point M.

- Réciproquement, au nombre complexe $z = a + ib$ on peut associer le point M de coordonnées (a ; b). On dit que M est le point image de z.

- Lorsqu'on repère un point par son affixe dans un repère orthonormal, on dit qu'on se place dans le plan complexe.





Exemple :

On a placé dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i :

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 3 + i$

$z_3 = -1 + 2i$

$z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$

$z_6 = -2i$

$z_7 = -2$

$z_8 = -i - 3$

2°) Affixe d'un vecteur :

Propriété :

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. On note A (z_A) et B (z_B).

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a alors pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Exemples :

On se place dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ avec le point A d'affixe 1 – 2i et B d'affixe –2 + i. On a donc A (1 – 2i) et B (–2 + i).

Alors le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = 1 - 2i$,

et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-2 + i) - (1 - 2i) = -2 + i - 1 + 2i = -3 + 3i$.

On obtient $\overrightarrow{OA}$ (1 – 2i) et $\overrightarrow{AB}$ (–3 + 3i).

IV. Module et arguments :

1°) Module d'un nombre complexe (rappel) :

Définition :

Le module du complexe $z = a + ib$ est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Interprétation géométrique :

Si z_M est l'affixe du point M, $|z_M|$ = OM (distance de O à M).

Si $z_{\overrightarrow{AB}}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|$ = AB (distance de A à B).

Propriété :

Pour tout nombre complexe z, $z\bar{z} = |z|^2$.

Preuve :

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Exemple :

Calculons le module de chacun des nombres complexes suivants :

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

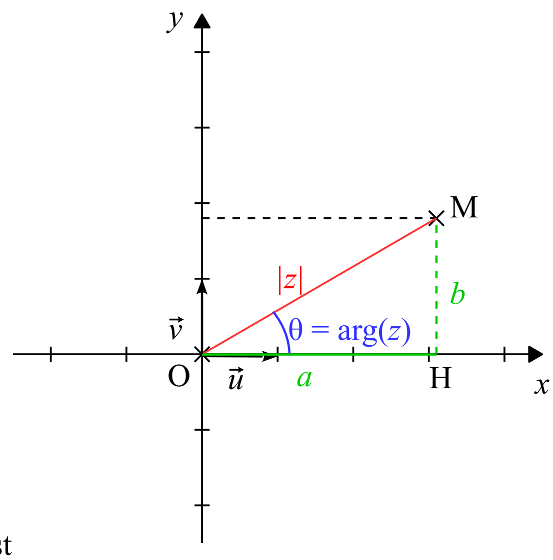
$|1 - i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|-5 - 2i| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

$|-5| = 5$

$|9i| = 9$

2°) Arguments d'un nombre complexe :



Définition :

Soit $z = a + ib$ non nul et M le point d'affixe z.

- On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que

$$\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2p]$$

- On note $\theta = \arg(z)$
- θ vérifie : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$
- L'unique argument θ compris dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est appelé l'argument principal de z.

Exemple :

Soit $z = 2\sqrt{3} - 2i$. Calculons le module et l'argument principal θ de z.

$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Mais attention, on se souvient que sur le cercle trigonométrique il y a deux angles qui ont le même cosinus : $\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$. Pour savoir duquel des deux il s'agit, il faut regarder le signe de $\sin\theta$ ou plus simplement le signe de b. Ici, $\sin\theta = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} < 0$ (tout comme $b = -2 < 0$). On en conclue que $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

Remarque :

Nous remarquons donc que, si $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi]$, $\cos\theta$ permet de trouver la valeur absolue de θ et que $\sin\theta$ ou b permettent d'en déterminer le signe.

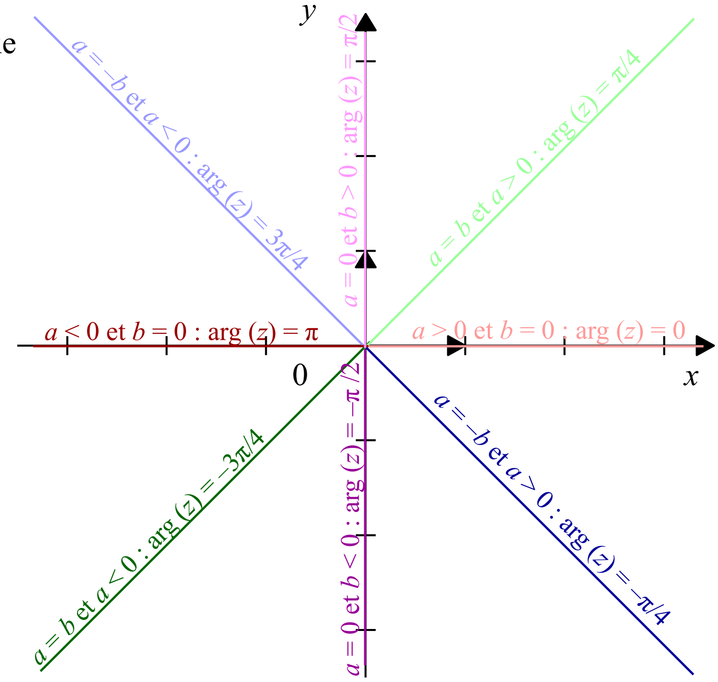
Propriété :

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux à 2π près.

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')$ à 2π près.

Remarque :

Quelques cas simples : soit $z = a + ib$ non nul affixe du point M :



- **si $b = 0$** alors

si $a > 0$, alors $z \in \mathbb{R}^{+*}$ et on a donc $\arg(z) = 0$

si $a < 0$, alors $z \in \mathbb{R}^{-*}$ et on a donc $\arg(z) = \pi$

- si **$a = 0$** alors

si $b > 0$, $M \in [0\ ;\ \vec{v}\,)$ et on a donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

si $b < 0$, $M \in [0\ ;-\vec{v}\,)$ et on a donc $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}$

- **si $a = b$** alors

si a et b sont positifs, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$

si a et b sont négatifs $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4}$

- **si $a = -b$** alors

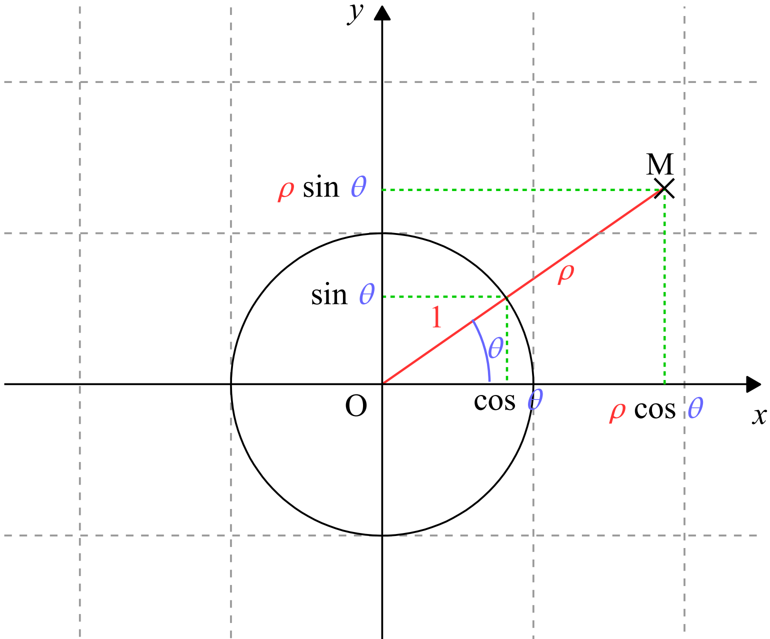
si $a > 0$, $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$

si $a < 0$, $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Exemples :

$\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$; $\arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$; $\arg(3) = 0$; $\arg(-2 + 2i) = \dfrac{3\pi}{4}$.

3°) Forme trigonométrique :



Définition :

Soit z le nombre complexe de module ρ et d'argument θ.

D'après la figure ci-contre, z peut s'écrire $z = \rho\cos\theta + i\,\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe.

Réciproquement, si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec ρ et θ réels et $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ (2\pi)$.

Exemple 1 :

Nous avons vu dans le premier exemple du I. 2°) que $|2\sqrt{3} - 2i| = 4$ et $\arg(2\sqrt{3} - 2i) = -\frac{\pi}{6}$.

Nous pouvons donc die que l'écriture trigonométrique de $2\sqrt{3} - 2i$ est $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Exemple 2 :

Si on nous donne la forme trigonométrique d'un nombre complexe, il est facile de retrouver sa forme algébrique :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$