DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

I. Primitive d'une fonction :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Exemple :

Si $f(x) = 2x$, une primitive de f est $F(x) = x^2$, une autre est $F_2(x) = x^2 + 7$.

2°) Ensemble des primitives :

Théorème :

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. Alors pour tout réel c, la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I. Toute primitive de f sur I est de ce type.

Remarque :

Une fonction admettant des primitives sur I en possède donc une infinité.

Exemple :

Si $f(x) = 2x$, toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

3°) Tableau des primitives :

En lisant le tableau des dérivées à « l'envers », on obtient le tableau suivant :

	La fonction f	**Fonctions primitives F (c est une constante réelle)**	**Définie sur**
1	$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
3	$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
4	$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n entier relatif non nul différent de -1)	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
5	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
6	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
7	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
8	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$

III. Détermination de primitives :

1°) Opérations sur les primitives :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.

Si F est une primitive de f, alors kF est une primitive sur I de kf.

Si F est une primitive de f et G une primitive de g alors F + G est une primitive de $f + g$.

Exemples :

Soient $f(x) = x^5$ et $g(x) = \sin x$. D'après le tableau ci-dessus, $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$ et $G(x) = -\cos x$ sont des primitives respectives de f et g.

Donc, si $h(x) = 6f(x)$, alors $H(x) = 6F(x) = x^6$ est une primitive de $h(x)$.

Si $i(x) = f(x) + g(x)$, alors $I(x) = F(x) + G(x) = \dfrac{x^6}{6} - \cos x$ est une primitive de $i(x)$

2°) Primitive prenant une valeur en un point donné :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un nombre de l'intervalle I et a un nombre réel quelconque. Il existe une unique fonction F, primitive de f sur I, telle que $F(x_0) = a$.

Exemple :

Soit $f(x) = x$. Déterminons la primitive F de f telle que $F(2) = 3$.

F est de la forme $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$. On doit avoir $F(2) = 3$ donc $\dfrac{2^2}{2} + c = 3$ donc $c = 1$. La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 1$.

II. Complément :

1°) Dérivée de $g(ax + b)$:

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie et dérivable sur J telles que $f(x) = g(ax + b)$, où a et b sont des réels tels que $ax + b \in$ J.

Si la fonction g est dérivable sur J, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = ag'(ax + b)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x + 2)$.

$f(x) = g(ax + b)$, avec $g(x) = \cos(x)$ et $ax + b = 3x + 2$. Donc $a = 3$, et $g'(x) = -\sin(x)$.

alors $f'(x) = ag'(ax + b) = a \times (-\sin(ax + b)) = -3\sin(3x + 2)$.

2°) Complément sur les primitives :

	La fonction f	**Fonctions primitives F (c est une constante réelle)**	**Définie sur**
9	$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
10	$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$