NOM :	**DEVOIR DE MATHEMATIQUES**	**sujet A**
PRENOM :.....................	Durée : 2 heures **Calculatrice autorisée**	**2^{de}** ....

C1 : Savoir et utiliser des connaissances.	
C2 : Rechercher l'information utile.	
C3 : Argumenter, résoudre, démontrer.	
C4 : Communiquer un résultat.	
A : Prendre des initiatives, critiquer un résultat.	

Chaque candidat traite obligatoirement les exercices 1 à 4.
Les exercices 4 (partie C) et 5 (Autres orientations) sont traités selon l'orientation souhaitée, qui devra être précisée sur la copie.
Il faudra rendre avec votre copie le sujet complet.
Le sujet comporte trois pages.

<u>Exercice 1 :</u> (4 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(3 ; 4), B(0 ; 3), C(–1 ; 0) et D(2 ; 1).

1) a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. **C1**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\3-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

b) Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ? **C1**

On en déduit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc que ABCD est un parallélogramme.

2) a) Calculer les longueurs AB et AD. **C1**

$AB=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ et $AD=\sqrt{(2-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$.

b) Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier. **C3**

ABCD est donc un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, il s'agit donc d'un losange.

3) a) On note I le milieu de la diagonale [AC]. Calculer les coordonnées de I. **C1**

$I\left(\frac{3-1}{2};\frac{4+0}{2}\right) = I(1;2)$.

b) Déterminer les coordonnées du point E tel que AIDE soit un rectangle. Justifier votre démarche. **A**

I étant le centre du losange ABCD, AID est un triangle rectangle (les diagonales d'un losange sont perpendiculaires). Pour que AIDE soit un rectangle, il suffit donc de faire en sorte que ce soit un parallélogramme, comme il possède un angle droit, ce sera un rectangle. Pour ce faire, nous pouvons par exemple chercher les coordonnées de E telles que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ED}$. Si $E\begin{pmatrix}x_E\\y_E\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2-x_E\\1-y_E\end{pmatrix}$.

Il faut donc que $-2 = 2 - x_E$ et $-2 = 1 - y_E$, soit $x_E = 4$ et $y_E = 3$.

<u>Exercice 2 :</u> (3,5 points)

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher :

- deux boules vertes numérotées 2 et 4 ;
- trois boules jaunes numérotées 1, 2 et 3.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne et on note leur somme.

1) Compléter le tableau suivant :

Somme		Boules vertes		Boules jaunes		
		2	4	1	2	3
Boules vertes	2		6	3	4	5
	4	6		5	6	7
Boules jaunes	1	3	5		3	4
	2	4	6	3		5
	3	5	7	4	5	

2) Certaines cases doivent être supprimées. Pourquoi ?

Ce sont les cases qui se trouvent sur la diagonale : comme il s'agit d'un tirage sans remise, on le peut pas piocher la même boule deux fois de suite.

3) On note A, B et C les événements suivants :

- A : « obtenir une somme égale à 5 » ;
- B : « obtenir une somme paire » ;
- C : « obtenir une somme inférieure ou égale à 5 » .

Calculer la probabilité des événements A, B, C, B∩C, B∪C. **C1** **C3**

P(A) = $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

B = {4 ; 6} donc P(B) = $\frac{4}{20}+\frac{4}{20}=\frac{2}{5}$.

C = {3 ; 4 ; 5} donc P(C) = $\frac{4}{20}+\frac{4}{20}+\frac{6}{20}=\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$.

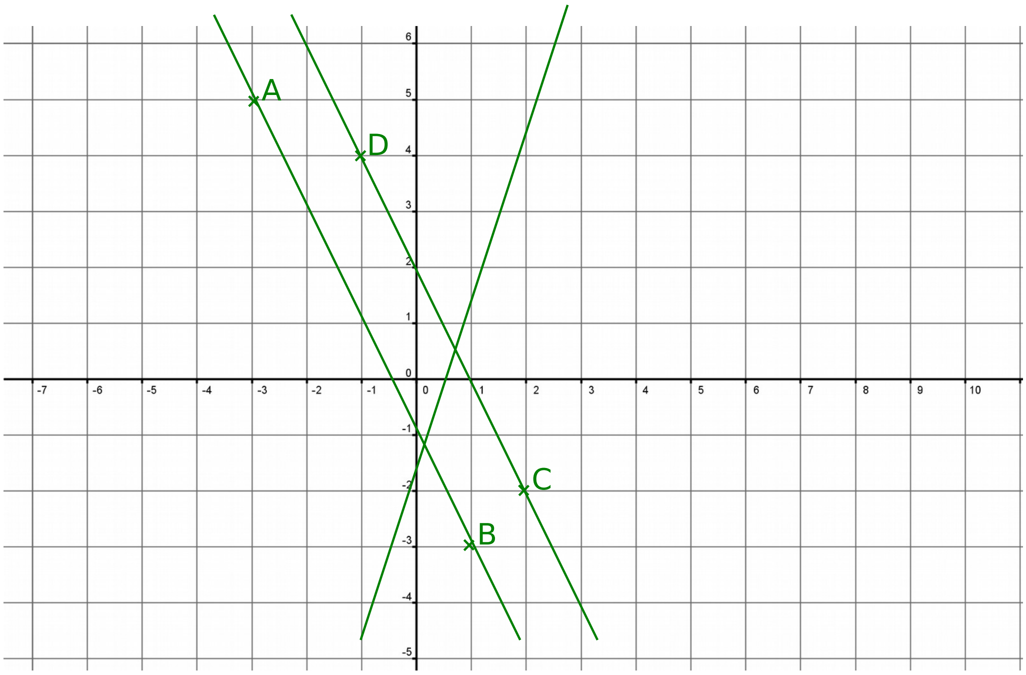
B ∩ C = {4} donc P(B ∩ C) = $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

P(B ∪ C) = P(B) + P(C) – P(B ∩ C) = $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$.

Exercice 3 (5 points) :

Dans le plan muni d'un repère, on considère les points A(–3 ; 5), B(1 ; –3), C(2 ; –2) et D(–1 ; 4).

1) Placer les points dans le repère. La figure sera complétée au fur et à mesure. **C1**



2) Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB). **C1**

Les abscisses de A et de B sont différentes, (AB) a donc une équation de la forme

$y = mx + p$ avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-3-5}{1+3} = -2$.

Donc (AB) a donc une équation de la forme $y = 2x + p$.

On sait de plus que A ∈ (AB), ses coordonnées vérifient donc l'équation de (AB).

Donc $5 = -2 \times (-3) + p$, donc $p = -1$.

(AB) a donc pour équation $y = -2x - 1$.

3) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier. **C1**

Pour répondre, il faut calculer le coefficient directeur de (CD) : $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{4+2}{-1-2} = -2$.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

4) Compléter l'algorithme ci-dessous qui prend en entrée les coordonnées de quatre points A, B, C et D et qui dit, en sortie, si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou pas.

```
Saisir X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, X_D, Y_D.
Affecter à P la valeur (y_B − y_A)/(x_B − x_A)
Affecter à Q la valeur (y_D − y_C)/(x_D − x_C)
Si P = Q
        Alors
        Affiche « (AB) et (CD) sont parallèles »
        Sinon
        Affiche « (AB) et (CD) ne sont
                pas parallèles »
FinSi
```

5) On considère la droite (d) d'équation $y = 3x + 2$.

a. Tracer cette droite. **C1**

b. Résoudre le système $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$. **C3**

On a donc $-2x - 1 = 3x + 2$

soit $-3 = 5x$

donc $x = -\dfrac{3}{5}$ $(= -0{,}6)$.

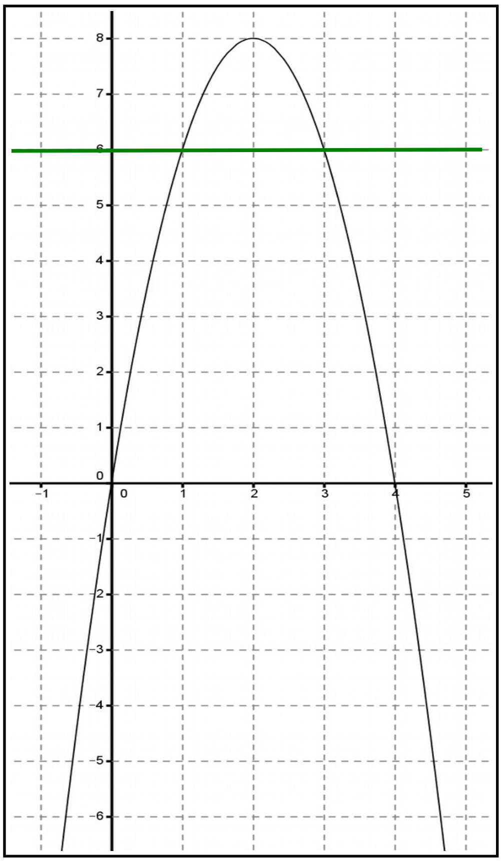
On obtient donc $y = 3 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) + 2 = -\dfrac{9}{5} + \dfrac{10}{5} = \dfrac{1}{5}$ (= 0,2).

c. Ce résultat vous paraît-il cohérent ? Expliquer. **A**

Nous obtenons des valeurs que semblent bien être les coordonnées du point d'intersection entre les droites (d) d'équation $y = 3x + 2$ et (AB) d'équation $y = -2x - 1$ (que nous lisons sur le graphique).

Exercice 4 : (5 ou 7,5 points)

f est une fonction polynôme de degré 2 définie sur ℝ.
Elle a pour représentation graphique, la courbe (C) ci-contre, dans le plan rapporté à un repère orthogonal.



Partie A : Étude graphique

1) Résoudre graphiquement
a) l'équation $f(x) = 6$. S = {1 ; 3} **C1**
b) l'inéquation $f(x) < 0$. S =]–∞ ; 0[∪]4 ; +∞[**C1**

2) Déterminer le maximum de la fonction f et la valeur de x pour laquelle il est atteint. **C2**
Le maximum est 8 et est atteint pour $x = 2$.

3) Donner le tableau de signes de la fonction f. **C1**

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : Étude algébrique

La fonction f représentée graphiquement ci-contre, est définie sur ℝ par $f(x) = -2x^2 + 8x$.

1) a. Factoriser f. **C1**
$f(x) = 2x(-x + 4) = 2x(4 - x)$
b. Démontrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire
$$f(x) = -2(x-2)^2 + 8$$ **C1**
$-2(x-2)^2 + 8 = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2x^2 + 8x - 8 + 8 = -2x^2 + 8x = f(x)$.

2) a. Étudier, à l'aide d'un tableau, le signe de l'expression
$$2x(4-x)$$ **C1**

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$4-x$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$2x(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$. **C1**
S =]–∞ ; 0[∪]4 ; +∞[

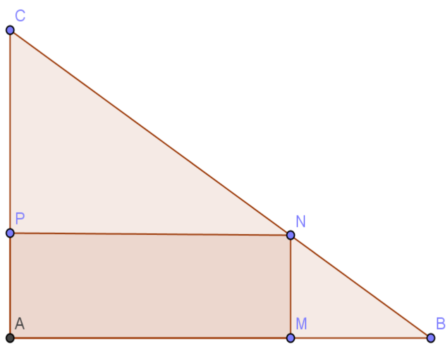
3) Établir le tableau de variations de la fonction f sur ℝ ? Expliquer. **C3** **C4**

La forme canonique $f(x) = -2(x-2)^2 + 8$ nous permet de déterminer les coordonnées du sommet de la parabole : (2 ; 8). De plus, le coefficient devant x^2 est négatif ($a = -2$), la parabole est donc tournée vers le bas. On obtient :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	8	$\searrow$

Partie C (2,5 points) : Étude d'un problème concret (***Uniquement pour les élèves demandant une 1ère S, STL ou STI2D***)

Dans l'angle droit d'un terrain triangulaire, on souhaite construire un enclos de forme rectangulaire avec une aire la plus grande possible. Les dimensions du terrain sont telles que : AB = 8 m et AC = 4 m.
Les points M, N et P appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC] et [AC] de telle sorte que AMNP soit un rectangle. On appelle x la longueur AP, en mètres.



1) Dans quel intervalle varie x ?   [0 ; 4]   **C2**

2) Justifier l'égalité : $\frac{PN}{AB} = \frac{CP}{CA}$.   **C1**

Il s'agit du théorème de Thalès appliqué aux triangles ABC et PNC.

3) En déduire, en fonction de x, la longueur PN.   **C3**

$\frac{PN}{AB} = \frac{CP}{CA} \Leftrightarrow \frac{PN}{8} = \frac{4-x}{4}$ d'où PN = 2(4 – x).

4) Montrer que l'aire $f(x)$ du rectangle AMNP est donnée par : $f(x) = -2x^2 + 8x$.   **C3**

$f(x)$ = AP×PN = 2x(4 – x) = $-2x^2 + 8x$.

5) En utilisant les résultats de la partie B, montrer que l'aire du rectangle AMNP admet un maximum et donner la valeur de ce maximum ainsi que la position correspondante du point P sur le segment [AC].   **C2**

D'après le tableau de variation de la partie B, $f(x)$ admet un maximum de 8 qui est atteint pour x = 2.

<u>Exercice 5</u> : (2,5 points)   (Autres orientations)

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-contre :

1) Encadrer $f(x)$ avec précision lorsque :

a) $x \in$ [2 ; 4]   b) $x \in$ [–3 ; 4].   **C1**

a) Sur [2 ; 4], –5 $\leqslant f(x) \leqslant$ 1 b) Sur [–3 ; 4], –5 $\leqslant f(x) \leqslant$ 1

2) Comparer $f(0)$ et $f(1)$. Justifier votre réponse.   **C1 C3**

0 et 1 appartiennent à [–3 ; 2], où f est croissante, on a donc f(0) < f(1).

x	-3		2		4		5
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2

3) Donner le nombre d'antécédents de 0 par la fonction f.   **C2**

D'après le tableau de variations, 0 possède 2 antécédents : un dans [–3 ; 2] et un dans [2 ; 4].

4) On sait de plus que l'image de 3 est –2.

Dessiner une allure de la courbe de f compatible avec toutes les informations données.   **C1**