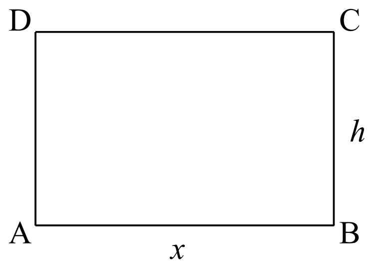
Lycée Tocqueville, Grasse **CORRIGÉ** **18 Mai 2017**

NOM :	**DEVOIR DE MATHÉMATIQUES**	**sujet A**
PRÉNOM :.....................	Durée : 2 heures **Calculatrice autorisée**	**2de** ....

C1 : Savoir et utiliser des connaissances.	
C2 : Rechercher l'information utile.	
C3 : Argumenter, résoudre, démontrer.	
C4 : Communiquer un résultat.	
C5 : Utiliser des logiciels, des algorithmes.	
A : Prendre des initiatives, critiquer un résultat.	

Exercice 1 :



Un rectangle ABCD a un périmètre constant égal à 40 cm mais sa longueur et sa largeur ne sont pas fixées.

On note x = AB et h = BC (longueur et largeur en cm).

Le but final de l'exercice est de trouver ses dimensions pour qu'il ait une aire S maximale.

Méthode 1 : à l'aide d'une fonction.

1) Expliquer pourquoi x appartient à l'intervalle $[0 ; 20]$.

Le périmètre du rectangle est de $\mathscr{P} = 2x + 2h = 40$.

La plus petite valeur possible de x est 0 (c'est une longueur, donc positive). Pour que x soit le plus grand possible, il faut que h soit le plus petit possible, donc $h = 0$.

Dans ces conditions $2x + 2h = 40$ devient $2x = 40$ soit $x = 20$.

On a donc bien $x \in [0 ; 20]$.

2) En raisonnant sur le périmètre, montrer que $h = 20 - x$.

Nous avons vu juste au dessus que $2x + 2h = 40$, c'est-à-dire que $2h = 40 - 2x$, ou encore $h = 20 - x$.

3) En déduire que l'expression de l'aire S du rectangle en fonction de x est $S(x) = 20x - x^2$.

$S(x) = x \times h = x(20 - x) = 20x - x^2$.

4) a) Justifier que la fonction S est un polynôme du second degré.

$S(x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x + 0$ est bien de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -1 \neq 0$; $b = 20$ et $c = 0$.

Il s'agit donc bien d'une polynôme de degré 2.

b) Résoudre l'équation $S(x) = 0$ et en déduire l'abscisse du sommet de la parabole.

$S(x) = 0$ revient à $x(20 - x) = 0$, donc $x = 0$ ou $20 - x = 0$. Donc $S = \{0 ; 20\}$. L'abscisse du sommet de la parabole représentant S est donc la moyenne entre ces deux solutions, c'est-à-dire $x = 10$.

c) En déduire la valeur de x qui rend l'aire maximale et donner la forme du rectangle correspondant.

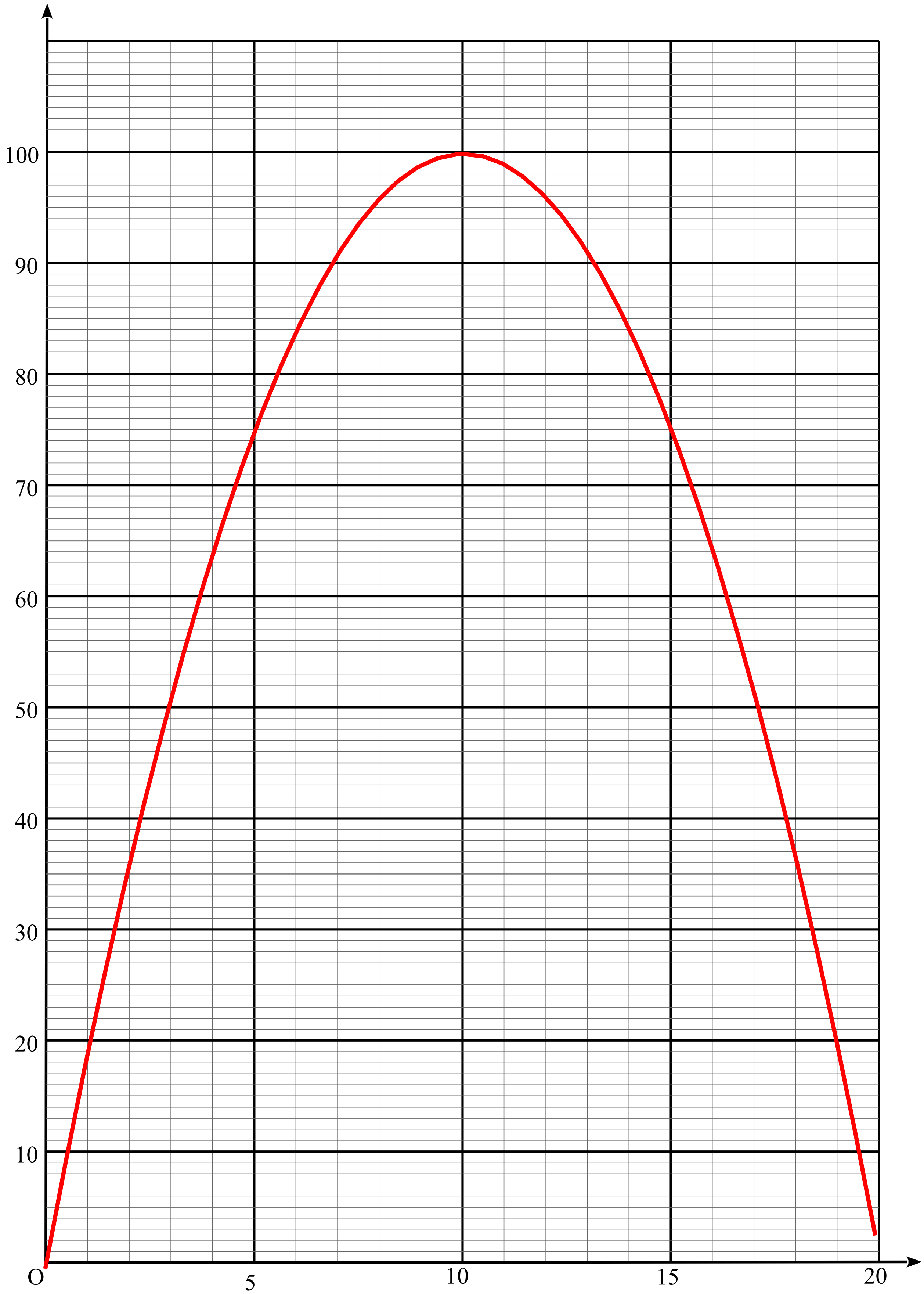
Comme le coefficient du x^2 de la fonction S est négatif, donc la fonction S admet un maximum, de plus, avec la question précédente, nous savons l'abscisse du sommet de la parabole est 10, donc le maximum de la fonction S est $S(10) = 20 \times 10 - 10^2 = 100$

Nous avons $x = 10$ donc $h = 20 - x = 10$ ABCD est donc alors un carré.

5) a) À l 'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeur en annexe (***page 4***).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(x)$	0	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100

b) Tracer la courbe représentative de S dans le repère fourni en annexe (***page 4***).



Méthode 2 : à l'aide d'un algorithme

On veut créer un algorithme qui donnerait une valeur approchée à l'unité de la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale. Pour cela on utilise la méthode dite du balayage, c'est-à-dire qu'on teste toutes les valeurs entières de x comprises entre 0 et 20. Nous avons commencé à écrire l'algorithme ci-contre, à vous de le compléter :

```
Variables n, i, S et T
S prend_la_valeur 0
n prend_la_valeur 0
Pour i allant de 0 à 20
        T prend_la_valeur 20i – i²
        Si T > S
        Alors
                S prend_la_valeur T
                n prend_la_valeur i
        Fin_si
Fin_Pour
Afficher « l'aire est maximale lorsque x vaut »
Afficher n
Afficher « l'aire est alors de »
Afficher S
```

Exercice 2 :

Partie A :

En fin de journée, une commerçante relève tous les tickets de caisse lui permettant de savoir :

- Le moyen de paiement utilisé pour payer : cartes bancaires, chèques ou espèces.

- Le montant des achats qu'elle classe en 2 groupes : montants de moins de 10 euros et montants supérieurs ou égaux à 10 euros.

Elle fait le tableau suivant qui recense le nombre de tickets suivant ses critères :

montant	Par carte bancaire	Par chèque	En espèces
Inférieur à 10 euros	25	0	60
Supérieur ou égal à 10 euros	50	50	15

1) La caissière choisit au hasard un ticket parmi les 200 tickets de caisse.

Soients A l 'événement « Le montant de l'achat est inférieur à 10 euros » ;

B l'événement « Le paiement a été fait par carte bancaire » ;

C l'événement « Le paiement a été fait en espèces ».

a) Calculer la probabilité de l'événement A et celle de l'événement B.

L'événement A contient 85 éléments donc P (A) = $\frac{85}{200}=\frac{17}{40}=0{,}425 = 42{,}5$ %.

L'événement B contient 75 éléments donc P (B) = $\frac{75}{200}=\frac{3}{8}=0{,}375 = 37{,}5$ %.

b) Décrire par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

$A \cap B$ est l 'événement « L'achat est inférieur à 10 euros et a été fait par carte bancaire » ;

$A \cup B$ est l 'événement « L'achat est inférieur à 10 euros ou a été fait par carte bancaire ».

c) Calculer P (A ∩ B) et P (A ∪ B).

L'événement A ∩ B contient 25 éléments donc P (A ∩ B) = $\frac{25}{200}=\frac{1}{8}=0{,}125$ = 12,5 %.

P (A ∪ B) = P (A) + P (B) – P (A ∩ B) = 0,425 + 0,375 – 0,125 = 0,675 = 67,5 %.

d) Décrire par une phrase $\overline{\text{C}}$, l'événement contraire de C, et calculer sa probabilité.

C est l'événement « Le paiement n'a pas été fait en espèces » ou « Le paiement a été fait par chèque ou par carte bancaire ».

P ($\overline{\text{C}}$) = 1 – P (C) = $1-\frac{75}{200}=\frac{5}{8}=0{,}625$ = 62,5 %.

Ou : L'événement $\overline{\text{C}}$ contient 125 éléments donc P ($\overline{\text{C}}$) = $\frac{125}{200}=\frac{5}{8}$ = 0,625 = 62,5 %.

2) La caissière a pris un ticket provenant d'un paiement par carte bancaire, quelle est la probabilité que son montant soit supérieur ou égal à 10 euros ?

Parmi les 75 tickets provenant d'un paiement par carte bancaire, 50 ont un montant supérieur ou égal à 10 €, la probabilité cherchée est donc de $\frac{50}{75}=\frac{2}{3}$.

Partie B :

À chaque paiement par carte bancaire, des frais lui sont facturés par la banque. Elle décide donc d'apposer une affiche sur un mur de son magasin avec le texte suivant : « le patron préfère les chèques ou les espèces ».

Elle sait qu'avant qu'elle ne mette l'affiche, environ 40 % des paiements étaient effectués par carte bancaire. Sur les 500 paiements qui ont suivi l'affichage, 170 ont été effectués par carte bancaire.

Pouvez-vous aider la commerçante à savoir si son affichage a eu une influence sur le comportement de ses clients ? Expliquer votre démarche.

Commençons par déterminer l'intervalle I de fluctuation à 95 % du nombre de paiements parmi 500 qui sont effectués par carte bancaire lorsque 40 % des paiements sont effectués par ce moyen de paiement.

$$\text{I} = \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}4-\frac{1}{\sqrt{500}};0{,}4+\frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0{,}355 ; 0{,}445] = [35{,}5\ \% ; 44{,}5\ \%].$$

Puis calculons la proportion *p* des paiement réellement effectués par carte bancaire après l'affichage :

$f=\frac{170}{500}=\frac{17}{50}=0{,}34$. *f* est inférieur à la borne inférieure de I (0,34 ∉ [0,355 ; 0,445]), on peut donc dire que au seuil de 95%, l'affichage a eut une influence.

Exercice 3 : ***(pour les élèves souhaitant une orientation AUTRE QUE en S, STI2D ou STL)***

On a demandé à 200 élèves de seconde du lycée Quoteville de chronométrer leur temps de travail personnel le soir durant une semaine. Les résultats de cette enquête sont regroupés dans le tableau suivant :

Temps (en minutes)	[0 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 150[	[150 ; 200[
Nombre de lycéens	20	30	10	50	45	20	25
E.C.C.	20	50	60	110	155	175	200

1) Calculer le temps moyen de travail de ce groupe (montrer le détail des calculs).

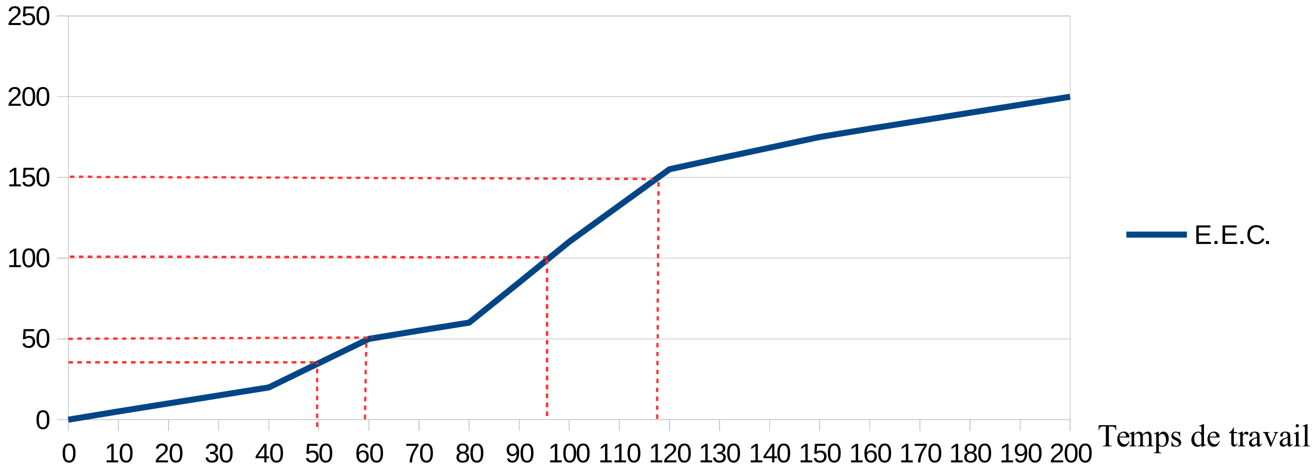
$$\bar{x}=\frac{20\times20+50\times30+70\times10+90\times50+110\times45+135\times20+175\times25}{200}=\frac{765}{8}=95{,}625$$

2) a) Compléter la dernière ligne du tableau avec les effectifs cumulés croissants.

b) Interpréter à l'aide d'une phrase la valeur située dans la case grisée.

Ceci signifie que sur les 200 élèves interrogés, 60 ont travaillé moins de 80 minutes le soir durant la semaine.

3) a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.



b) Déterminer graphiquement une valeur approchée de la médiane, du premier et du troisième quartile. (faire apparaître les traits ayant permis la lecture sur le graphique).

Graphiquement, on peut estimer la médiane à environ 95, $Q_1 \approx 60$ et $Q_3 \approx 117$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de lycéens étudiant au plus 50 minutes le soir (faire apparaître les traits ayant permis la lecture sur le graphique).

Graphiquement, on peut dire qu'environ 30 élèves étudient au plus 50 minutes.

Exercice 3 : (pour les élèves souhaitant une orientation en S, STI2D ou STL)

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) , on considère les points : A(–2 ; 2), B(2 ; 6), C(4 ; 4) et on appelle $\mathscr{C}$ cercle de diamètre [AC].

1) Calculer les coordonnées du point E, centre du cercle $\mathscr{C}$.

Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu de [AC] donc $E\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_C}{2}\\ \dfrac{y_A+y_C}{2}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}\dfrac{-2+4}{2}\\ \dfrac{2+4}{2}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

2) Calculer la distance AC.

3) Montrer que le point B appartient au cercle $\mathscr{C}$.

$EC=\sqrt{10}$ est le rayon de $\mathscr{C}$.

$EB=\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{10}$. Le point B appartient donc à $\mathscr{C}$.

4) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

ABC est inscrit dans $\mathscr{C}$ dont un diamètre est [AC], il est donc rectangle en B.

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC}$ (O étant l'origine du repère).

$\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} x_O - x_A \\ y_O - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Quelle est la nature du quadrilatère AOCB ?

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$ donc AOCB est un parallélogramme.

De plus, ABC étant un triangle rectangle, AOCB a un angle droit et est donc un rectangle.

5) Soit D (–4 ; 1). Déterminer l'équation de la droite (AD).

$x_A \neq x_D$ donc la droite a une équation de la forme $y = mx + p$, avec $m = \dfrac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \dfrac{1-2}{-4+2} = 0{,}5$.

L'équation est donc de la forme $y = 0{,}5x + p$.
Or, A(–2 ; 2) ∈ (AD), donc $2 = -2 \times 0{,}5 + p$ donc $p = 3$.
L'équation est donc $y = 0{,}5x + 3$.

6) Le point F (–1 ; 2) appartient-il à (AD) ?

$0{,}5x_F + 3 = 0{,}5 \times (-1) + 3 = 2{,}5 \neq y_F$, donc F ∉ (AD).