GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

I. Notion de fonction :

1°) Définition :

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble $\mathcal{D}$ le mécanisme mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de $\mathcal{D}$ un réel unique noté $f(x)$. On note f : $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x)$

2°) Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x ;
- x est l'**antécédent** de $f(x)$;
- $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f.

Exemple :

Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, on définit la fonction f par : $x \mapsto f(x) = (x-1)^2 - 3$

$f(-2) = (-2-1)^2 - 3 = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$: l'image de -2 par la fonction f est 6.

$f(-1) = (-1-1)^2 - 3 = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$: l'image de -1 par la fonction f est 1.

$f(0) = (0-1)^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: l'image de 0 par la fonction f est -2.

$f(1) = (1-1)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$: l'image de 1 par la fonction f est -3.

$f(2) = (2-1)^2 - 3 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: l'image de 2 par la fonction f est -2.

On peut dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2

Remarque :

Chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule. Certaines images peuvent avoir plusieurs antécédents. Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.

II. Représentation graphique d'une fonction :

Définition :

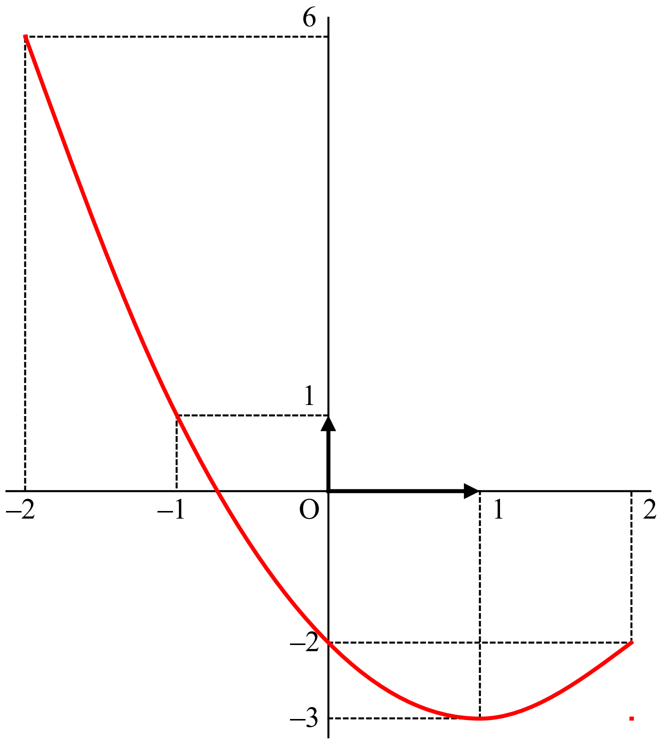
On considère le repère (O ; I, J). On appelle **représentation graphique** ou **courbe représentative** d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition $\mathcal{D}$.

Exemple :

On va représenter sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ la fonction définie par $f : x \mapsto (x-1)^2 - 3$

On va utiliser le tableau des valeurs :

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	$f(x)$	6	1	-2	-3	-2



Remarque :

Puisque chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule, alors toute droite « verticale » a un point d'intersection et un seul avec la courbe représentative de la fonction.

On parle de la « courbe d'équation $y = (x - 1)^2 - 3$ ».

Remarque :

Lorsque l'on veut tracer la représentation graphique d'une fonction, on commence par compléter un tableau de valeur. Cela peut se faire à l'aide de la calculatrice (voir votre livre p 15).

III. Résolutions graphiques :

Voir fiche pratique résolution graphique d'équations et inéquations.

IV. Sens de variation d'une fonction :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

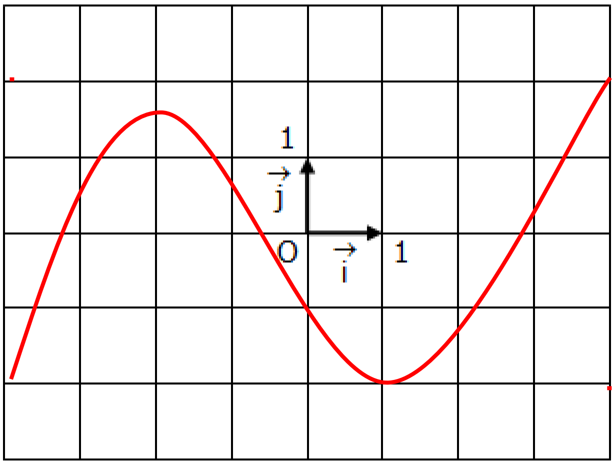
Définition :

- On dit que f est **strictement croissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont dans le même ordre que a et b, c'est à dire si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. Autrement dit, quand x augmente, son image $f(x)$ augmente aussi.
- On dit que f est **strictement décroissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont dans l'ordre inverse de a et b, c'est à dire si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$. Autrement dit, quand x augmente, son image $f(x)$ diminue.

Exemple :

Si l'on regarde la représentation graphique de la fonction g définie sur [–4 ; 4] réalisée ci-contre, on observe qu'elle est croissante sur [–4 ; –2], décroissant sur [–2 ; 1] et enfin croissante sur [1 ; 4]. On peut résumer tout cela dans un tableau de variation :

x	–4		–2		1		4
$f(x)$	–2	↗	1,5	↘	–2	↗	2



Définition :

Sur un intervalle I :

- s'il existe un nombre a tel que, pour tout x de I, $f(a) \geqslant f(x)$, on dit que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I ;
- s'il existe un nombre a tel que, pour tout x de I, $f(a) \leqslant f(x)$, on dit que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I.

Exemple :

Pour la fonction f du *II*, –3 est un minimum sur]–∞ ; +∞[

Pour la fonction g ci-dessus, –1 est un minimum et 3 est un maximum sur [–4 ; 4]