GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

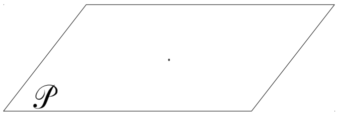
I. Perspective cavalière :

Les principes de base :

- Les arêtes visibles sont représentées en trait continu et les arêtes cachées sont représentées en trait pointillé.
- Seules les figures situées dans un plan parallèle au plan frontal sont représentées en vraie grandeur.
- Les autres figures sont déformées par la perspective, mais les droites concourantes, le parallélisme, l'alignement et les milieux sont conservés.

II. Généralités :

On représente un plan de l'espace par un parallélogramme (censé représenter un rectangle en perspective).



Propriété :

Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

III. Comment définir une droite ou un plan :

1°) Définir une droite :

Par deux points A et B distincts de l'espace il passe **une et une seule droite**. Cette droite peut être notée (AB).

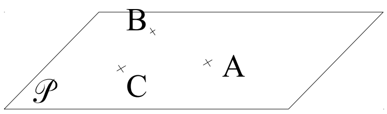
On peut également définir une droite par un point et une direction. (**exemple** : la droite parallèle à la droite (d) passant par le point A).

2°) Définir un plan :

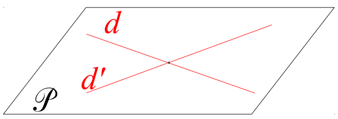
Par trois points A, B et C non alignés de l'espace, il passe un et un seul plan.

Ce plan peut être noté (ABC).

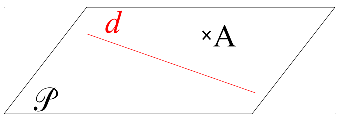
Un plan peut aussi être déterminé par l'une des conditions suivantes :



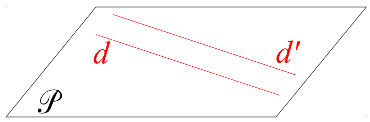
deux droites sécantes



une droite et un point extérieur à celle-ci



Deux droites strictement parallèles



IV. Positions relatives de droites et de plans :

1°) Position relative de deux droites :

Notation :

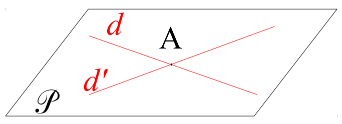
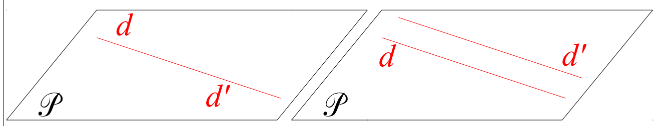
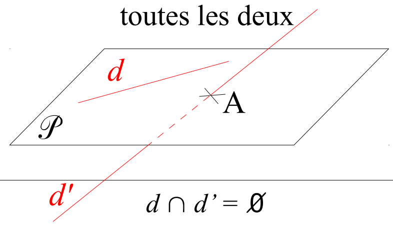
Pour noter l'intersection de deux objets, on utilise le symbole ∩. Par exemple, (AB) ∩ (CD) = E se lit « AB inter CD égale E » et signifie que les droites (AB) et (CD) se coupent au point E. E est donc l'ensemble des point qui appartiennent aux deux droites en même temps.

Notation :

Le symbole ∅ désigne l'ensemble vide. Par exemple, écrire (AB) ∩ (CD) = ∅ signifie que les droites (AB) et (CD) n'ont aucun point commun.

Propriété :

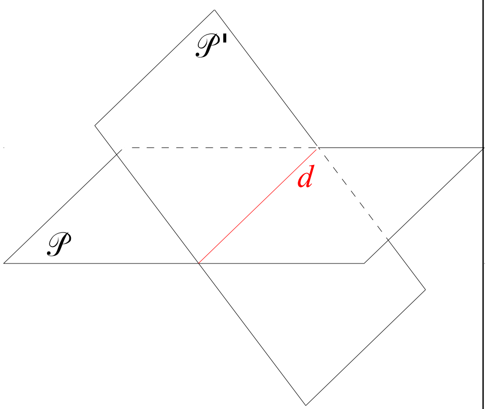
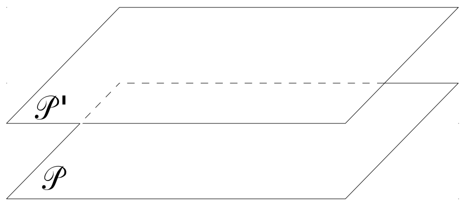
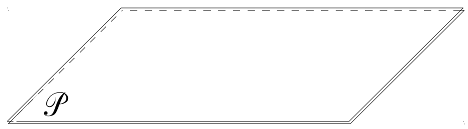
Deux droites *d* et *d'* de l'espace sont soit non coplanaires (il n'existe aucun plan contenant ces deux droites), soit coplanaires (il existe un plan contenant ces deux droites). Elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan.

Coplanaires			non coplanaires
sécantes	parallèles		aucun plan ne les contient toutes les deux
 	 		
$d \cap d' = \{A\}$	$d = d'$ confondues	$d \cap d' = \emptyset$ strictement parallèles	$d \cap d' = \emptyset$

Ainsi, deux droites de l'espace n'ayant pas de point commun sont soit **strictement parallèles** soit **non coplanaires**.

2°) Position relative de deux plans :

P et *Q* sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

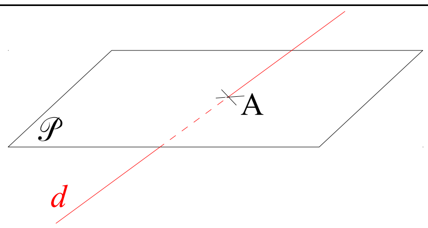
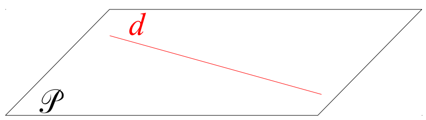
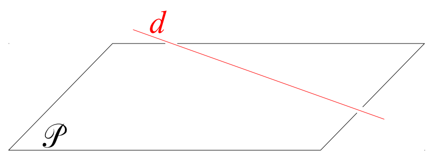
sécants	Parallèles	
 	 	
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$ strictement parallèles	$\mathscr{P} = \mathscr{P}'$ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus

3°) Position relative d'une droite et d'un plan :

Notation :

Le symbole ⊂ est utilisé lorsque l'on veut dire qu'un ensemble est inclus dans un autre. Par exemple $[1 ; 6] \subset [0 ; 7]$ signifie que l'ensemble des nombres compris entre 1 et 6 est inclus dans l'ensemble des nombres compris entre 0 et 7. Autrement dit, tous les éléments du premier ensemble appartiennent également au deuxième.

Une droite *d* et un plan *P* de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

Sécants	Parallèles	
 	 	
$\mathscr{P} \cap d = \{A\}$	$d \subset \mathscr{P}$	$\mathscr{P} \cap d = \emptyset$

V. Parallélisme dans l'espace :

1°) Définitions :

Définitions :

• Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes. Il en est ainsi de deux droites confondues ou bien coplanaires et sans point commun.

• Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi de deux plans confondus ou sans point commun.

• Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. Il en est ainsi d'une droite incluse dans un plan ou d'une droite et d'un plan sans point commun.

Remarques :

Le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure, dans l'espace, qu'elles sont parallèles. En effet, elles peuvent être non coplanaires (voir ***IV.* 1°)**)

2°) Parallélisme entre droites :

Théorème 1 :

Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Théorème 2 :

Si P et Q sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe P coupe aussi Q et les droites d'intersection sont parallèles.

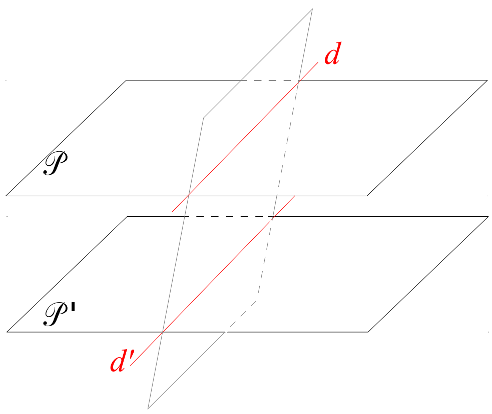
Théorème 3 :

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

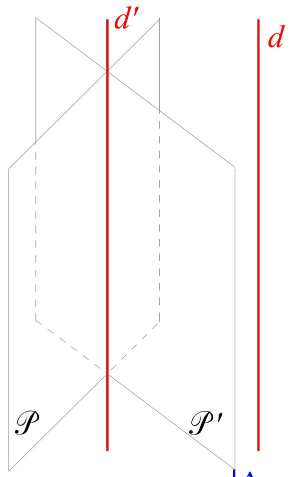
Théorème du toit :

Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur intersection est une droite parallèle aux deux premières.

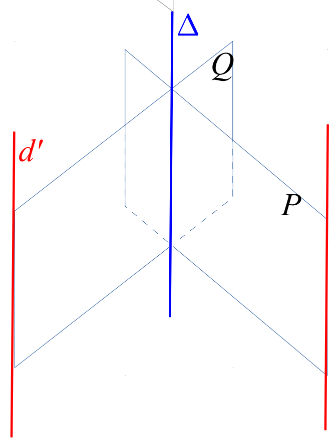
Th 2 :



Th 3 :



Th du toit :



P et Q sont sécants et contiennent d et d' qui sont parallèles.

Donc Δ, qui est l'intersection de P et de Q est parallèle à d et d'

Soit $\Delta = P \cap Q$.

$d \subset Q$ et $d' \subset P$ et $d \,//\, d'$ donc $\Delta \,//\, d$ et $\Delta \,//\, d'$.

3°) Parallélisme entre plans :

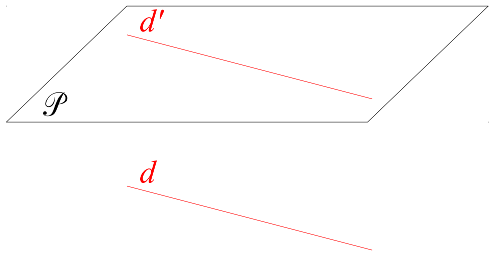
Théorème 4 :

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Théorème 5 :

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

4°) Parallélisme entre droite et plan :



Théorème 6 :

Si une droite *d* est parallèle à une droite *d'* alors la droite *d* est parallèle à tout plan *P* contenant la droite *d'*.