FONCTION CARRE
FONCTION POLYNÔME DE DEGRÉ 2

I. Fonction carré :

1°) Définition :

Définition :

Tout nombre réel a un carré.

On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R} =]-\infty\ ;+\infty[$.

2°) Sens de variation de la fonction :

Théorème :

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$

Démonstration :

Soit a et b positifs tels que $a < b$

$a^2 < ab$ (si on multiplie par a positif)

$ab < b^2$ (si on multiplie par b positif)

Donc $a^2 < ab < b^2$

Donc f est strictement croissante sur $[0\ ; +\infty[$

Soit a et b négatifs tels que $a < b$

$a^2 > ab$ (si on multiplie par a négatif)

$ab > b^2$ (si on multiplie par b négatif)

Donc $a^2 > ab > b^2$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$.

Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) Courbe représentative :

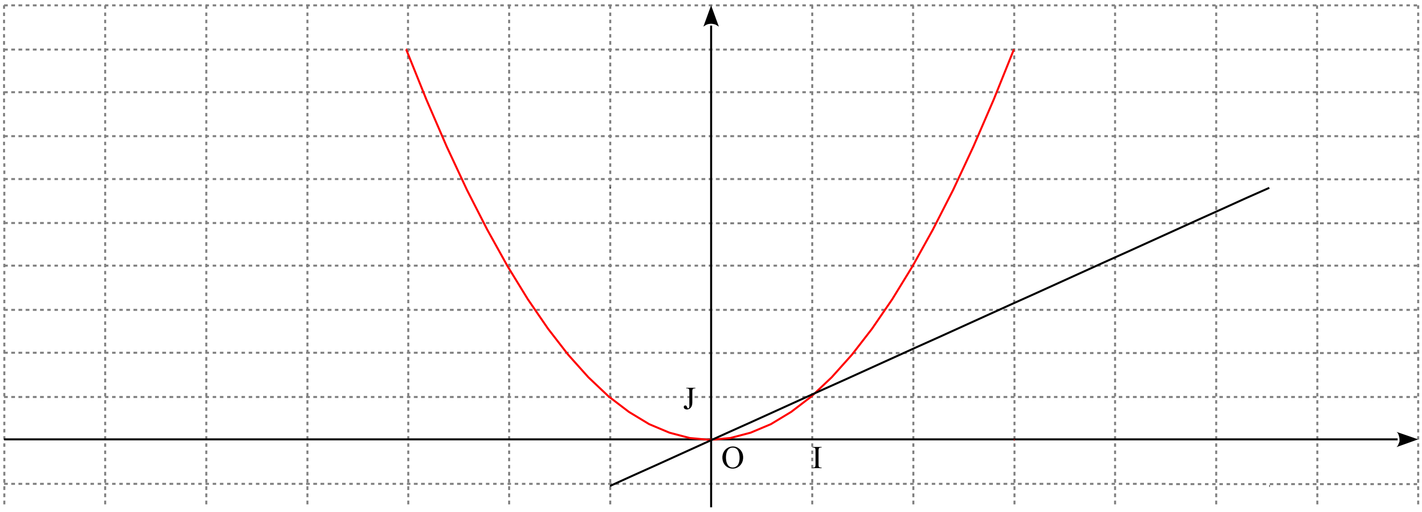
● D'après le tableau de variations, la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ admet pour minimum 0 quand x vaut 0.

● Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont la même image. Graphiquement, cela signifie que quel que soit x, les points de la courbe M(x ; $\boldsymbol{f(x)}$) et M'($-x$; $\boldsymbol{f(-x)}$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

● Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9



Cette courbe s'appelle une **parabole**. Le point O s'appelle le **sommet** de la parabole.

Remarque :

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$: la courbe est au dessous de la droite $y = x$.

Si $x > 1$, on a $x^2 > x$: la courbe est au dessus de la droite $y = x$.

3°) Non linéarité :

Propriété :

La fonction carré n'est pas une fonction affine.

Preuve :

Calculons le taux de variation τ_1 entre la première et la deuxième colonne du tableau de valeurs ci-dessus, puis τ_2, celui entre la première et la troisième colonne :

$\tau_1 = \frac{1-0}{1-0} = 1$ et $\tau_2 = \frac{4-0}{2-0} = 2$. Le taux de variation n'est pas toujours le même, la fonction carré n'est donc pas affine.

4°) Équation du type $x^2 = a$:

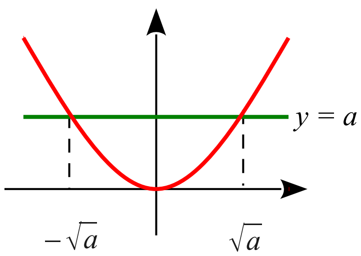
Propriété :

Toute équation du type « $x^2 = a$ » admet :

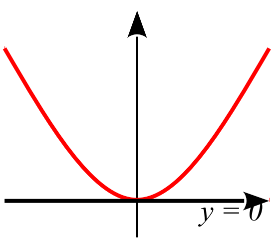
Si $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a = 0$, une solution unique : 0

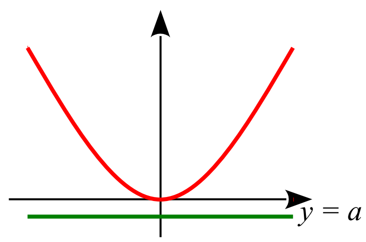
Si $a < 0$, aucune solution.



2 solutions



1 seule solution



Pas de solution

II. Fonction polynôme de degré deux :

1°) Définition :

Définition :

On appelle fonction polynôme de degré deux toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ trois réels et } a \neq 0.$$

Exemple :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 2$; $b = -3$; $c = 5$) ;

$g(x) = x^2 - 4$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 1$; $b = 0$; $c = -4$) ;

$h(x) = x^2 + 2x$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 1$; $b = 2$; $c = 0$) ;

$i(x) = (x + 2)(3x - 2)$ est une fonction polynôme de degré 2 ($a = 3$; $b = 4$; $c = -4$ après avoir développé) ;

$j(x) = x^2 - (x + 2)(x - 1)$ n'est pas une fonction polynôme de degré deux, car si l'on développe, les x^2 se simplifient, ce qui fait que l'on a $a = 0$. Il s'agit dans ce cas d'une fonction affine.

2°) Différentes formes :

Propriété : (admise)

On vient de voir qu'un polynôme du second degré pouvait s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la forme développée. Il existe d'autres formes, parmi lesquelles :

Forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec a, α et β trois réels et $a \neq 0$.

Forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 trois réels et $a \neq 0$.

Remarque :

La forme factorisée n'existe pas toujours.

Exemple :

La fonction $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$ (forme développée avec $a = 2$; $b = 2$ et $c = -3$) peut également s'écrire

$f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ (forme factorisée avec $a = 2$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$) ou encore

$f(x) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$ (forme canonique avec $a = 2$; $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{7}{2}$)

Remarque :

Quelle que soit la forme, a vaut toujours la même chose. Dans l'exemple précédent, $a = 2$.

Pour démontrer que ces trois formes sont égales, il suffit de développer les formes factorisée et canonique pour constater que l'on retrouve bien la forme développer.

3°) Représentation graphique :

Propriétés :

- La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.
- Elle a son ouverture vers le haut (c'est à dire qu'elle est décroissante puis croissante) si $a > 0$ et vers le bas (c'est à dire qu'elle est croissante puis décroissante) si $a < 0$.
- Le minimum (si $a > 0$) ou le maximum (si $a < 0$) de la fonction est β et est atteint lorsque $x = \alpha$. C'est-à-dire que les coordonnées du sommet S sont S(α ; β).
- Dans un repère orthogonal cette parabole possède un axe de symétrie verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) qui a pour équation $x = \alpha$.

Preuve (pour les extremums):

Supposons que $a > 0$ et prenons la forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Commençons par chercher la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est la plus petite possible. a et β sont des constantes, il faut donc trouver la valeur de x pour que $(x - \alpha)^2$ soit le plus petit possible. Or, c'est un carré, sa plus petite valeur est donc 0, lorsque $x = \alpha$. Le minimum est donc atteint lorsque $x = \alpha$, et vaut $f(\alpha) = a(\alpha - \alpha)^2 + \beta = \beta$.

Un raisonnement identique (en cherchant $f(x)$ le plus grand possible) nous prouve que le maximum est aussi atteint quand $x = \alpha$ pour $a < 0$, et vaut β.

Conséquence :

On peut établir le tableau de variation d'une fonction polynôme de degré deux en fonction du signe de a :

Si $a > 0$:

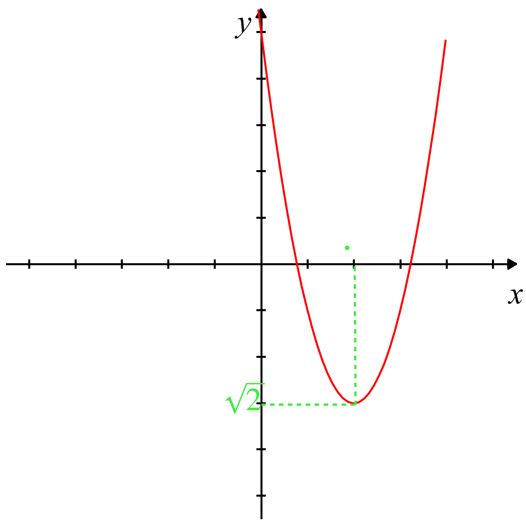
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

Si $a < 0$:

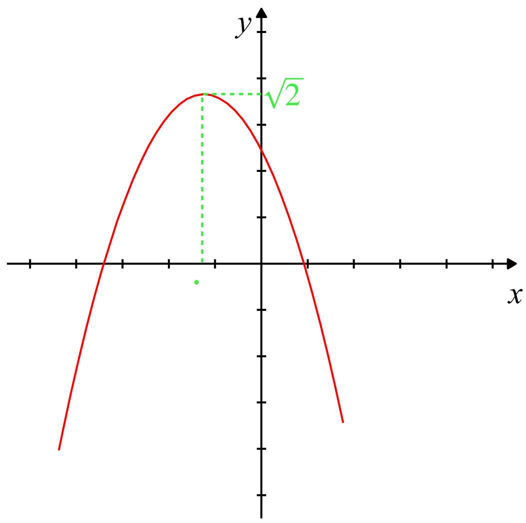
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

On peut également donner l'allure de la courbe :

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Propriété :

Si l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions, l'abscisse du sommet de la parabole est la moyenne de ces deux solutions.

Preuve :

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersections entre la parabole et la droite parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = k$. Ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$, qui est l'axe de symétrie de la parabole.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$. Le sommet de la parabole S a pour coordonnées S(3 ; –1). La droite d'équation $x = 3$ est l'axe de symétrie de la parabole.

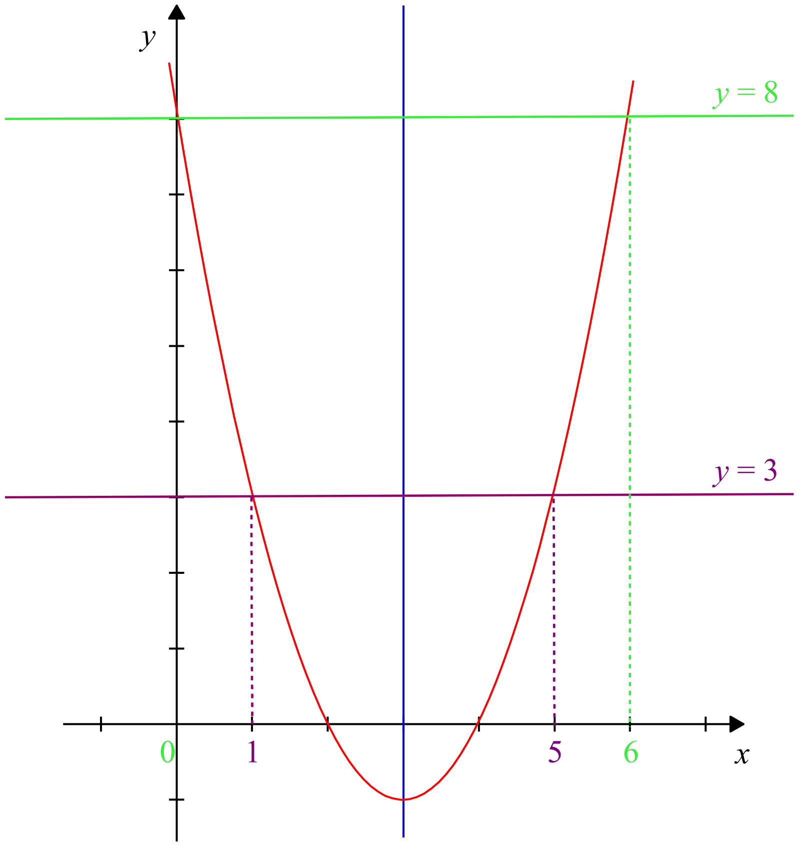
Les solutions de $f(x) = 8$ sont 0 et 6. $\dfrac{0+6}{2} = 3$.

Les solutions de $f(x) = 0$ sont 2 et 4. $\dfrac{2+4}{2} = 3$.

NB : Si vous ne vous souvenez pas comment résoudre ces équations, voir à la fin de ce cours.

Les solutions de $f(x) = 3$ sont 1 et 5. Là encore $\dfrac{1+5}{2} = 3$.

On retrouve bien dans chacun des cas l'abscisse de S.



Remarque :

Si l'on veut calculer l'ordonnée de S, il suffit de calculer l'image de son abscisse.

Exemple :

Dans notre exemple précédent, $f(3) = -1$.

Comment résoudre les équations $f(x) = 8$, $f(x) = 0$ et $f(x) = 3$.

1- pour $f(x) = 8$, on part de la forme développée : $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0$.

D'où $S = \{0 ; 6\}$.

2- pour $f(x) = 0$, on part de la forme factorisée : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0$.

D'où $S = \{2 ; 4\}$.

3- pour $f(x) = 3$, on est pour le moment obligé de faire une résolution graphique où d'utiliser un logiciel de calcul formel. Il faudra patienter jusqu'en première pour apprendre à résoudre cette équation par le calcul.

D'où $S = \{1 ; 5\}$.