TRANSLATION ET VECTEURS

I. Translation :

1°) Définition :

Définition :

La figure grise est obtenue à partir de la figure blanche par un « glissement rectiligne » jusqu'à ce que le point A se superpose au point B.

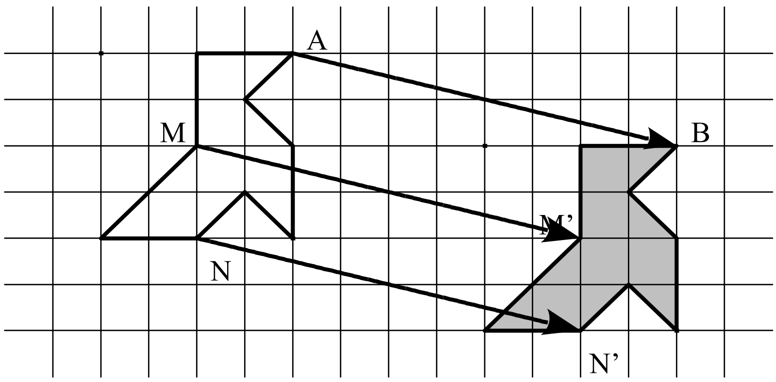
On dit que la figure grise est « l'image de la figure blanche par la translation qui transforme A en B ».

On dit aussi qu'elle est la « translatée » de la figure blanche par cette translation.

(MM') // (AB)

(NN') // (AB)

MM' = NN' = AB



2°) Image (« translaté ») d'un point :

M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que ABM'M est un parallélogramme.

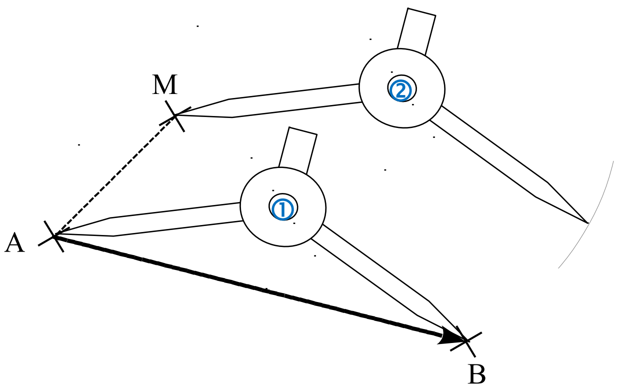
Méthode de construction (compas) : (c'est la même méthode que celle vu en 5$^{\text{ème}}$ pour construire un parallélogramme quand on connaît trois de ses sommets)

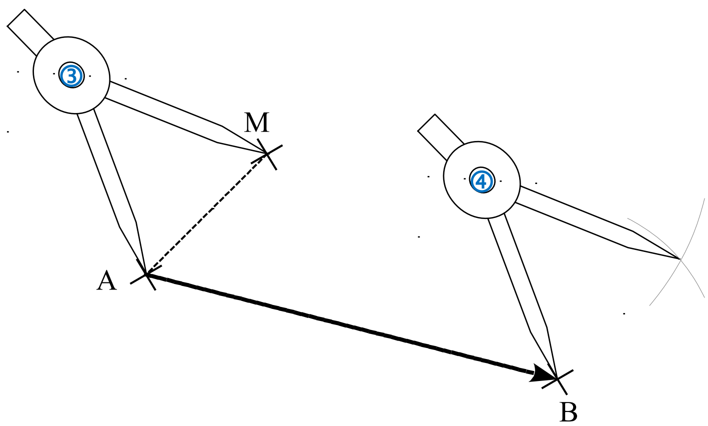
① On prend pour écart la distance entre les deux points définissant la translation (A et B).

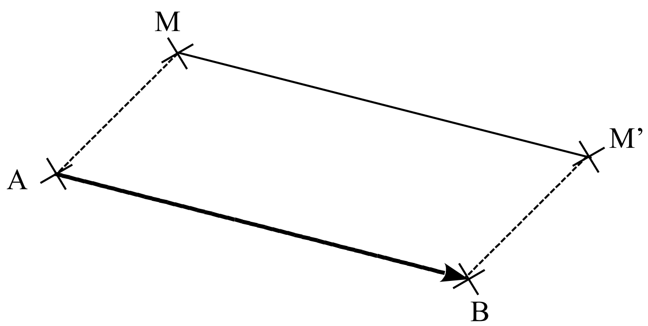
② On reporte cette distance à partir du point dont on cherche l'image (M).

③ On prend pour écart la distance entre le « point de départ de la translation » (A) et le point dont on cherche l'image (M).

④ On reporte cette distance à partir du « point d'arrivée de la translation » (B).



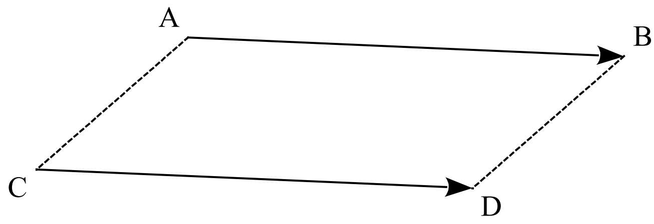




II. Les vecteurs :

1°) Écriture vectorielle d'une translation :

B est l'image de A par la translation qui transforme C en D revient à dire que ABDC est un parallélogramme.



Définition :

Concrètement, cela signifie que « le trajet qui va de A à B est exactement le même que celui qui va de C à D ». Ces deux trajets ont :

- la même **direction** (car les droites (AB) et (CD) sont parallèles).
- le même **sens** (de A vers B, de C vers D).
- la même **longueur** (car AB = CD).

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** et on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque :

Dans le parallélogramme ABDC, on peut aussi écrire les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}$.

2°) Caractérisation d'une égalité vectorielle :

a) Parallélogramme :

Propriété 1 :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

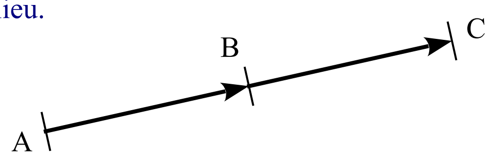
Propriété 2 :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.

b) Milieu d'un segment :

Propriété :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ si et seulement si B est le milieu du segment [AC].



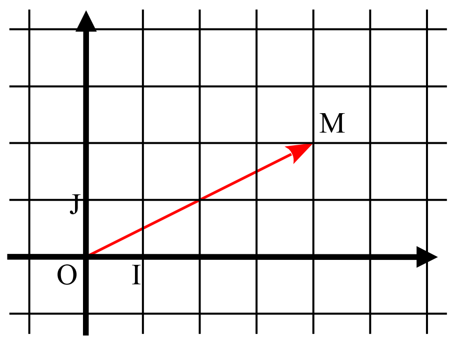
III. Coordonnées d'un vecteur :

1°) Définition

Définition :

Soit (O, I, J) un repère du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Les coordonnées ($x$; y) du point M sont aussi les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.



Exemple :

Sur la figure ci-contre $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et M(4 ; 2) et on note : $\overrightarrow{OM}$ (4 ; 2) ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

Attention :

Les coordonnées d'un point permettent d'indiquer la position de ce point dans le plan, ce n'est pas du tout le cas pour celles d'un vecteur. Les coordonnées d'un vecteur indiquent le déplacement qu'il décrit. Le vecteur $\vec{u}$ de l'exemple a pour coordonnées (4 ; 2), cela signifie qu'il décrit un déplacement (une translation) de 4 unités dans la direction de l'axe des abscisses puis de 2 unités dans la direction de l'axe des ordonnées.

Remarque :

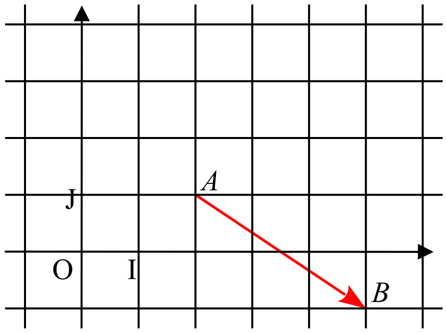
Les coordonnées d'un vecteur n'indiquant pas la position de ce vecteur dans le plan, elles ne s'appellent pas abscisse et ordonnée mais première et deuxième coordonnées.

2°) Calcul des coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Propriété :

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts.

Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Exemple :

Si $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

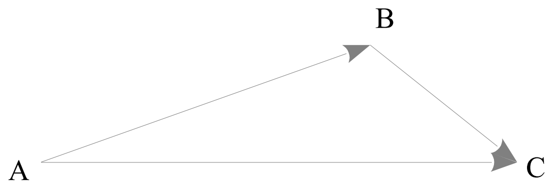
3°) Égalité vectorielle :

Propriété :

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

IV. Somme de deux vecteurs :



1°) Composée de deux translations :

A a pour image B par une translation, de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

B a pour image C par une translation, de vecteur $\overrightarrow{BC}$

La composée de ces deux translations est la translation qui transforme directement A en C, de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On note : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Cette égalité s'appelle la **Relation de Chasles**. Elle permet de transformer une somme de deux vecteurs en un seul vecteur, et réciproquement.

2°) Vecteur nul :

Définition :

Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est le vecteur $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, …

D'après la relation de Chasles, pour tout vecteur , on a : $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

3°) Opposé d'un vecteur :

Définition :

On dit que deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont :

➔ la même direction

➔ la même longueur

➔ mais **pas le même sens**

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ se note $-\vec{u}$.

L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$.

Remarque :

La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.

4°) Coordonnées :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On a alors $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, alors $-\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}\begin{pmatrix}-2+2\\5+1\end{pmatrix}=\vec{w}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$.