FONCTION INVERSE, FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

I. Fonction inverse :

1°) Définition :

Définition :

Tout nombre réel non nul a un inverse.

On appelle fonction inverse la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ (c'est à dire $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$, ou encore $\mathbb{R}-\{0\}$).

2°) Sens de variation :

Théorème :

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

Démonstration :

Soit a et b non nuls tels que $a < b$

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$:

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}\ .$$

Sur $]0\ ;\ +\infty[$:

Si a et b sont strictement positifs avec $0 < a < b$:

$a - b < 0$

$ab > 0$ (produit de deux positifs donc positif)

Alors $f(b) - f(a) < 0$

donc f est décroissante sur $]0 ;\ +\infty[$

Sur $]-\infty\ ;\ 0[$:

Si a et b sont strictement négatifs avec $a < b < 0$:

$a - b < 0$

$ab > 0$ (produit de deux négatifs donc positif)

Alors $f(b) - f(a) < 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0

3°) Courbe représentative :

Propriété :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

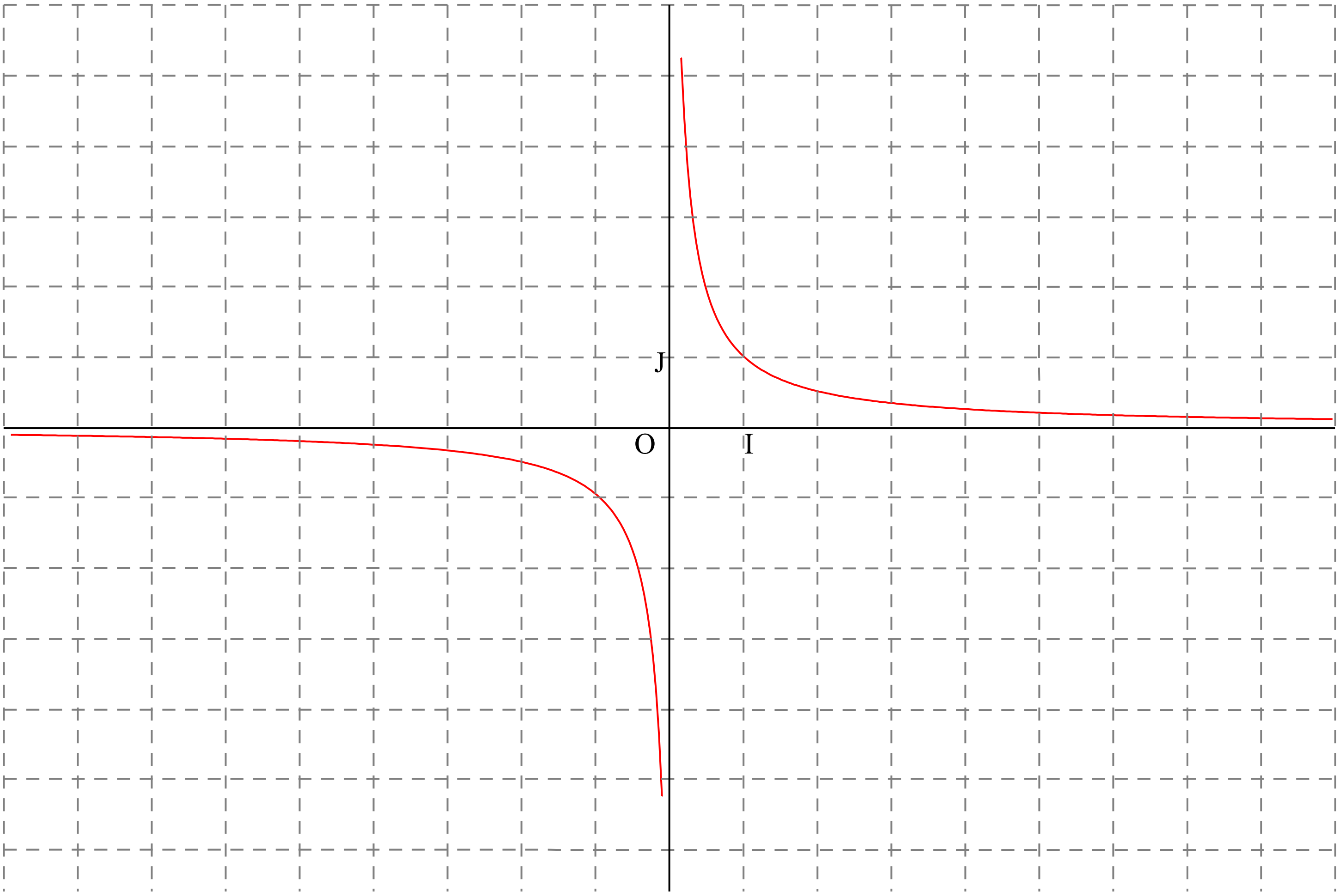
On dit alors que cette fonction est impaire, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont des images opposées ($f(-x) = -f(x)$).

Conséquence :

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur $x \in \mathbb{R}^*$, les points de la courbe $M(x\ ;\ f(x))$ et $M'(-x\ ;\ f(-x))$ ont une ordonnée opposée, et sont donc symétriques par rapport à l'origine.

Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de *x*, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à O :

x	0,25	0,5	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	0,5	0,25



Cette courbe s'appelle une hyperbole. Le point O s'appelle le centre de l'hyperbole et est donc centre de symétrie de l'hyperbole.

II. Fonction homographiques :

1°) Définition :

Définition :

Une fonction homographique *f* est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, où *a*, *b*, *c* et *d* sont des nombre réels avec $c \neq 0$.

Propriété :

Une fonction homographique $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie partout où son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$, que l'on note aussi $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Remarque :

La valeur $-\dfrac{d}{c}$ est appelée valeur interdite de la fonction *f*.

Preuve :

Nous savons qu'il est impossible de diviser par zéro, or $cx + d = 0 \Leftrightarrow cx = -d \Leftrightarrow x = -\frac{d}{c}$.

Exemple :

La fonction homographique $x \longmapsto \frac{2x+1}{3x-2}$ est définie lorsque $3x - 2 \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$. La valeur interdite de cette fonction homographique est donc $\frac{2}{3}$.

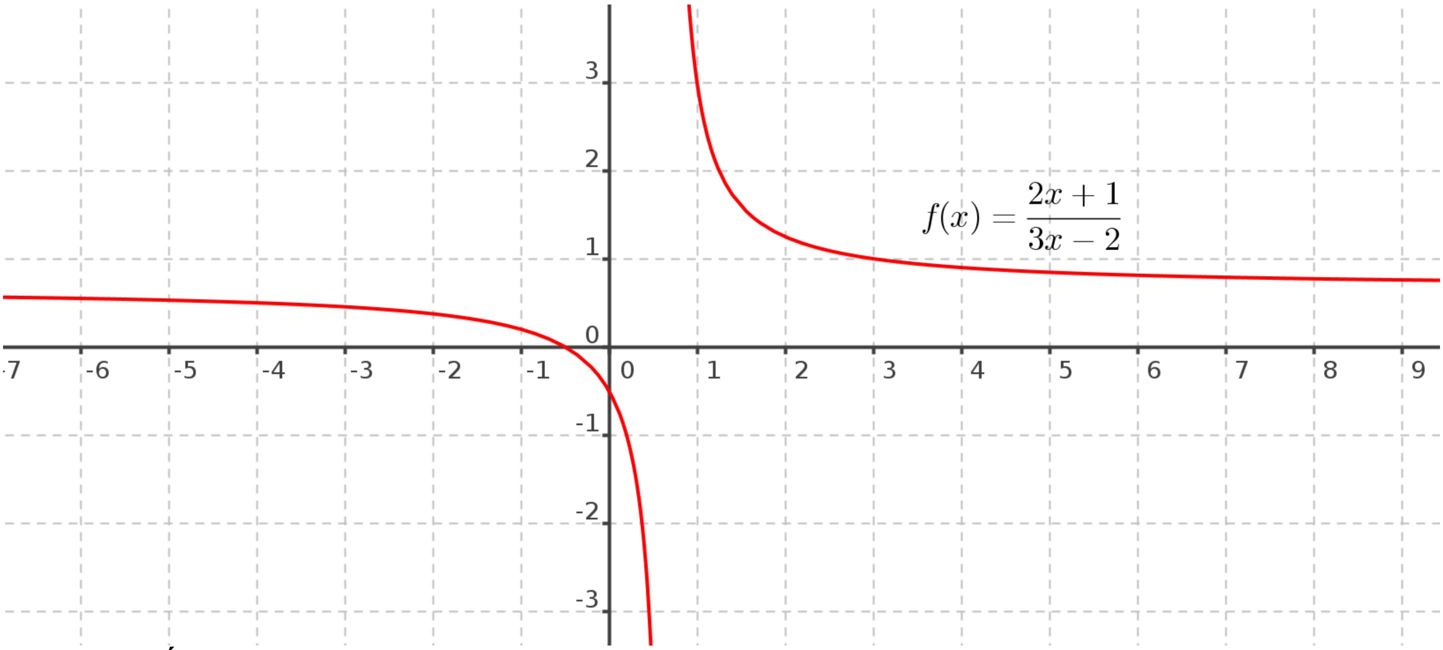
2°) Représentation graphique :

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole.

Exemple :

Ci-dessous, la représentation graphique de $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$ définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.



3°) Étude du signe d'une fonction homographique :

Comme lorsqu'il s'agit d'un produit, pour étudier le signe d'un quotient, il faut faire un tableau de signes. La différence est qu'il va falloir faire attention aux valeurs interdites.

Exemple :

Étude du signe de $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{3x-2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

La double barre de la dernière ligne indique que $\frac{2}{3}$ est une valeur interdite.

Remarque :

On peut se servir de ce tableau de signes pour résoudre des inéquations.

Exemple :

Grâce au tableau de signes précédent, la solution de $\dfrac{2x+1}{3x-2} \leqslant 0$ est S = $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right[$;

la solution de $\dfrac{2x+1}{3x-2} > 0$ est S = $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.

Remarque :

$\dfrac{2}{3}$ ne faisant pas partie du domaine de définition de *f*, il ne peut évidemment pas faire partie d'un des ensembles de solutions ci-dessus.