Vendredi 3 mars 2023 **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **STS BIOAC 1**

durée : 2 heures **Sur 20**

Les calculatrices sont autorisées en mode examen sont autorisées

Exercice 1 : (*10 points*)

Le ténébrion meunier (Tenebrio molitor) est un insecte de l'ordre des coléoptères, de la famille des ténébrionidés. Il est capable de vivre dans des denrées stockées très sèches, notamment dans la farine, d'où son nom de meunier. (Wikipédia).

De par la facilité de son élevage, cet insecte est très utilisé dans les laboratoires de recherches pour des études physiologiques sur son développement et sur son endocrinologie : sa nymphe est très sensible à l'hormone juvénile par exemple. Le ver est également un très bon appât notamment pour la pêche de la truite en étang.

Kévin, un apprenti boulanger, décide d'élever des vers de farine pour son club de pêche. Il commence son élevage 7 mois avant l'ouverture de la saison de pêche. Dans un large bac adapté qu'il entrepose à 27°C, il dispose de la farine et 500 vers, il laisse se faire les choses. Il suit l'évolution du nombre de vers et obtient les résultats suivants :

Nombre de quinzaines : t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers : N_i	500	749	1 122	1 681	2 518	3 772	5 650	8 464	12 678	18 992

1. Kévin se fait la remarque suivante : « chaque quinzaine la population augmente d'environ 50 % ». Expliquer cette modélisation. Est-elle réaliste sur le long terme ?

2 points

Augmenter de 50 % revient à multiplier par 1,5.

$500 \times 1{,}5 = 750$

En multipliant à chaque fois le résultats obtenu par 1,5, on obtient le tableau suivant (résultats arrondis à l'unité) :

Nombre de quinzaines : t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers : N_i	500	750	1 125	1 687	2 531	3 797	5 695	8 543	12 814	19 221

Cette modélisation semble en effet valable pour les 9 premières quinzaines.

Sur le long terme cependant, la population de vers ne peut pas augmenter indéfiniment car, état dans un espace clos, ils vont finir par manquer de place.

2. Kévin souhaite connaître le nombre de vers dont il disposera lors de l'ouverture de la prochaine saison. Il prévoit de faire un ajustement affine de N en t par la méthode des moindres carrés. Quel est le coefficient de corrélation de cet ajustement ?

On trouve un coefficient de corrélation de 0,9.

1 point

3. Il présente ses données à son professeur de mathématiques qui lui propose un nouveau modèle à partir du changement de variable suivant : $y_i = \ln\left(\dfrac{33000}{N_i} - 1\right)$.

a. Compléter le tableau ci-dessous. Arrondir au centième.

Nombre de quinzaines : t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers : N_i	500	749	1 122	1 681	2 518	3 772	5 650	8 464	12 678	18 992
y_i	4,17	3,76	3,35	2,92	2,49	2,05	1,58	1,06	0,47	–0,30

1,5 point

b. Quel est alors le coefficient de corrélation de l'ajustement affine de y en t ? Que pensez-vous de la proposition du professeur de mathématiques ?

Le nouveau coefficient de corrélation est alors de $r = –0,995$. Un ajustement affine sur cette nouvelle série est donc bien plus pertinent que sur la précédente. Le professeur de mathématiques est donc d'excellents conseils.

1 point

c. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement Δ de y en t par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients au centième.

$y = –0,48x + 4,31$.

1 point

d. Montrer que $N_i = \dfrac{33000}{e^{y_i}+1}$.

$y_i = \ln\left(\dfrac{33000}{N_i} - 1\right) \Leftrightarrow \dfrac{33000}{N_i} - 1 = e^{y_i} \Leftrightarrow \dfrac{33000}{N_i} = e^{y_i} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{N_i}{33000} = \dfrac{1}{e^{y_i}+1} \Leftrightarrow N_i = \dfrac{33000}{e^{y_i}+1}$.

2 points

e. Estimer le nombre de vers pour l'ouverture de la saison de pêche ? Justifier.

Commençons par estimer la valeur de y au bout de 14 quinzaines (7 mois) :

Pour $x = 14$, $y = –0,48 \times 14 + 4,31 = –2,41$.

D'après la question **d.**, on a alors $N = \dfrac{33000}{e^{-2,41}+1} \approx 30\ 280$.

1,5 point

On peut donc estimer le nombre de vers pour l'ouverture de la saison de la pêche à environ 30 280.

<u>Exercice 2 :</u>

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2e^{-2t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y' + 2y = 0$$

1 point

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $y_0(t) = Ce^{-2t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(t) = 2te^{-2t}$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$h(t) = u(t).v(t)$ avec $u(t) = 2t$ et $v(t) = e^{-2t}$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2t}$.

1 point

Donc $h'(t) = u'v + uv' = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}$.
D'où $h'(t) + 2h(t) = 2e^{-2t} - 4te^{-2t} + 4te^{-2t} = 2e^{-2t}$.
La fonction h est donc bien solution de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

1 point

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $g(t) = y_0(t) + h(t) = Ce^{-2t} + 2te^{-2t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

$f(0) = 1$ revient à $Ce^0 + 2 \times 0 \times e^0 = 1$, soit $C = 1$.
La fonction f cherchée est donc $f(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t} = (1 + 2t)e^{-2t}$.

1 point

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

(a) Vérifier que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$: $f'(t) = -4te^{-2t}$.

$f(t) = (1 + 2t)e^{-2t} = u(t).v(t)$ avec $u(t) = 1 + 2t$ et $v(t) = e^{-2t}$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2t}$.

Donc $h' = u'v + uv'$ soit $h'(t) = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}$.
D'où $h'(t) + 2h(t) = 2e^{-2t} - 2(1 + 2t)e^{-2t} = 2e^{-2t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} = -4te^{-2t}$.

1 point

(b) En déduire le signe de $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

t étant positif, $f'(t) = -4te^{-2t}$ est négatif sur $[0\,;+\infty[$. Comme de plus $f(0) = 1$, on en déduit le tableau de variations suivant :

1,5 point

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	1 $\searrow$ 0

3. (a) Compléter le tableau de valeurs donné en annexe. Arrondir à 10^{-2}.

0,5 point

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1	0,74	0,41	0,2	0,09	0,04

(b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en annexe.

Partie C : Applications de la partie B

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0\,;+\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}$$

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la partie B.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.

(a) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?

$g(1) = 1 - f(1) = 1 - (1 + 2)e^{-2} = 1 - 3e^{-2} \approx 0{,}59$.

0,5 point

(b) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?

$g(2) = 1 - f(2) = 1 - (1 + 4)e^{-4} = 1 - 5e^{-4} \approx 0{,}91$.

0,5 point

2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer de réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.

(a) Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leqslant 0{,}25$.

$g(t) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow 1 - f(t) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow f(t) \leqslant 0{,}25$.

0,5 point

(b) En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée en annexe, déterminer graphiquement, à 10^{-1} près, la durée d'utilisation du réfractomètre (*on laissera les traits de construction apparents*).

D'après le graphique, la durée d'utilisation du réfractomètre est d'environ 1,35 h, soit 1h et 21 minutes. **0,5 point**

Nom : **Prénom :**

ANNEXE (à rendre avec la copie)

a. Tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2}) de la fonction f :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1	0,74	0,41	0,2	0,09	0,04

b.