SUITES NUMÉRIQUES

I. Généralité :

1°) Définition :

Définition :

Une suite numérique est une fonction associant à tout nombre entier naturel n, un nombre réel u_n :

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Ce nombre $u(n)$ est aussi noté u_n.

Exemple :

Soit la suite définie par $u_n = 2n - 10$.

$u_0 = -10$; $u_1 = -8$; $u_2 = -6$; $u_3 = -4$; $u_{10} = 10$

Remarques :

- Le 1er terme de la suite est u_0, l'indice est 0, et u_{10} est le terme d'indice 10, et c'est le 11ème terme de la suite.
- La suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{n-3}$ n'est définie que pour $n \geqslant 3$. On la note $(v_n)_{n\geqslant 3}$.

2°) Suite définie par son terme général :

a) Définition :

Définition :

Une suite est définie par son terme général, (ou de façon explicite) lorsque le terme u_n est exprimé en fonction de n (à la manière des fonctions, $u_n = f(n)$).

Exemples :

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite (v_n) définie par $v_n = 0{,}5\, n^2 + 1$.

Remarque :

Lorsqu'une suite est définie par son terme général, on peut calculer n'importe lequel de ses termes en connaissant son rang.

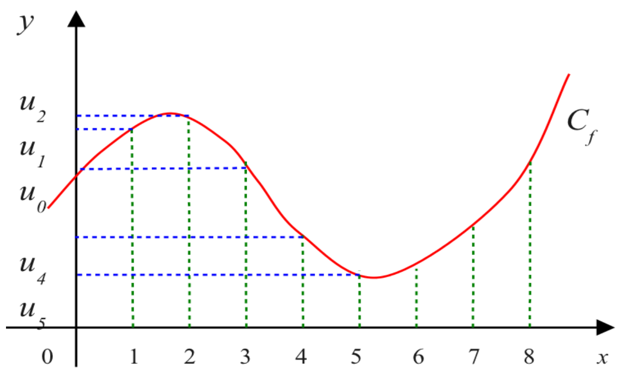
b) Graphiquement :

Représentation graphique :

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$.

On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

On dispose, à partir de la courbe représentative de la fonction f, d'une représentation graphique de la suite (u_n). Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0, u_1, u_2, ...



3°) Suite définie par récurrence :

Définition :

Une suite est définie par récurrence lorsque l'on donne son premier terme et la relation qui relie un terme u_n à son suivant u_{n+1}.

Exemples :

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. On a alors $u_1 = 3$; $u_2 = 7$; $u_3 = 15$ (...)

Remarque :

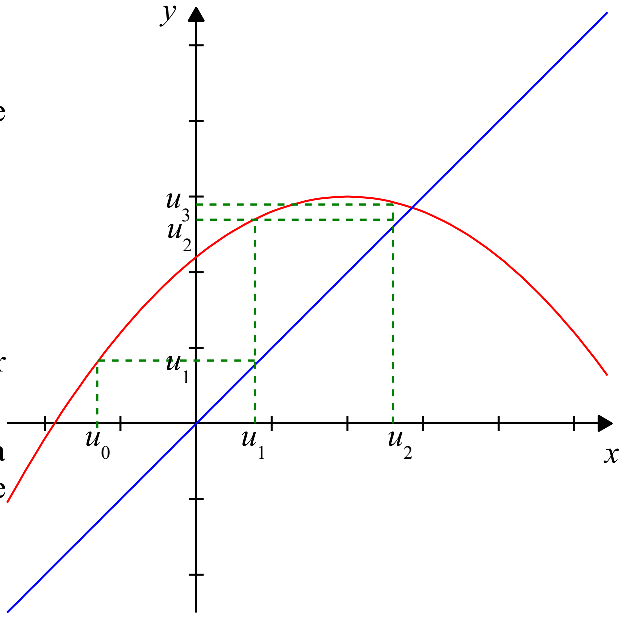
Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut calculer un terme qu'en connaissant son précédent.

Représentation graphique :

Soit f une fonction définie sur ℝ.

On définit une suite (u_n) en donnant son premier terme u_0, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On dispose, à partir de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$, d'une représentation graphique de la suite (u_n).

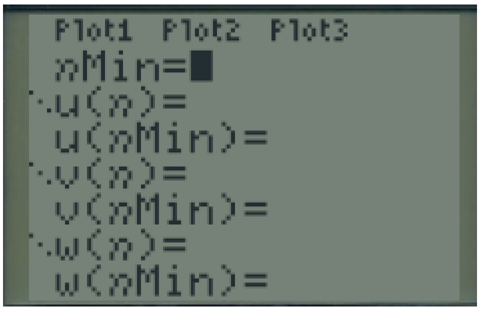


4°) À la calculatrice :

Il faut commencer par régler la calculatrice en 

« suite » (ou « seq » si votre calculatrice est en anglais. Ensuite, quand on appuie sur 

on obtient l'affichage suivant :



nMin est la valeur de n à partir de laquelle u_n est définie. Par exemple, pour $(u_n)_{n\geqslant 3}$, nMin = 3

u(n) est là où l'on saisit l'expression de u_n, soit en fonction de n si ma suite est définie par son terme général, soit en fonction de u(n–1) si la suite est définie par récurrence.

u(nMin) est le terme initial de la suite, qu'il n'est utile de saisir que lorsque la suite est définie par récurrence.

Remarque :

Le u s'obtient en faisant 

et le n en tapant sur 

.

II. Suites arithmétiques :

1°) Définition :

Définition :

On appelle suite arithmétique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre constant r au terme précédent. Le nombre r est appelé raison de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$

Exemple :

Soit la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$. On a alors $u_1 = -3$; $u_2 = 1$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$ (…)

2°) Propriété :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de 1^er terme u_0 et de raison r. Alors pour tout n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Exemple :

(u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0 = -7$ et de raison $r = 4$. Alors, pour tout n, $u_n = -7 + 4n$.

$u_1 = -7 + 1 \times 4 = -3$

$u_2 = -7 + 2 \times 4 = 1$

$u_3 = -7 + 3 \times 4 = 5$

$u_4 = -7 + 4 \times 4 = 9$ (…)

3°) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

Propriété :

La somme des $n + 1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

III. Suites géométriques :

1°) Définition :

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout nombre entier naturel n, on ait : $u_{n+1} = q\, u_n$. q est appelé la raison de la suite géométrique.

Remarque :

Chaque terme est obtenu en multipliant par un nombre constant le terme précédent.

Exemples :

– La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

u_0 ;	u_1 ;	u_2 ;	u_3 ;	u_4 ;
1	2	4	8	16

(u_n) est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

– La suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 tel que $v_0 = 12$ et de raison $-\frac{1}{2}$

v_0 ;	v_1 ;	v_2 ;	v_3 ;	v_4 ;
12	–6	3	–1,5	0,75

Application :

$(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = 2 \times 3^n$ est–elle une suite géométrique ?

On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$ (une constante).

La suite (u_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

2°) Terme général d'une suite géométrique :

Propriété :

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times q^n$.

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Plus généralement, on a : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemples :

suite géométrique	Expression explicite de u_n
premier terme $u_0 = 2$; $q = 3$	$u_n = u_0 \times q^n$. $u_n = 2 \times 3^n$
premier terme $u_1 = 5$; $q = -\frac{1}{2}$	$u_n = u_1 \times q^{n-1}$. $u_n = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Conclusion :

Pour prouver qu'un suite (u_n) est une suite géométrique, on a deux possibilités :

(i) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer qu'il s'agit d'une constante (qui est la raison de la suite)

(ii) Écrire le terme général u_n en fonction de n pour reconnaître $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

3°) Somme des termes :

Théorème :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 = 1$, c'est à dire $u_n = q^n$ alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + q + \ldots + q^n = \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad S_n = \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

IV. Sens de variation d'une suite numérique :

Vous devez savoir représenter graphiquement une suite, à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, pour en conjecturer le sens de variation.

Sur la calculatrice, une fois que la suite est définie, il suffit d'appuyer sur 

en veillant à ce que la fenêtre soit bien réglée.

V. Limites de suites géométriques :

1°) Suite ayant une limite infinie :

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 10^p. On dit aussi que (u_n) tend vers $+\infty$ ou diverge vers $+\infty$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim (u_n) = +\infty$. (u_n désigne le terme de la suite de rang n et (u_n) désigne la suite)

Remarque :

Une suite peut avoir pour tout entier naturel p des termes supérieurs à 10^p sans pour cela tendre vers $+\infty$.

Cette année, on déterminera, à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, le rang à partir duquel $u_n > A$ pour une valeur de A donnée.

2°) Suite ayant une limite finie :

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont à une distance de 0 inférieure à 10^{-p} (c'est à dire que $|u_n| < 10^{-p}$). On dit aussi que (u_n) tend vers 0 ou encore que (u_n) converge vers 0.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ou $\lim (u_n) = 0$.

Remarque :

Une suite peut avoir pour tout entier naturel p des termes à une distance de 0 inférieure à 10^{-p} sans pour cela tendre vers 0.

Cette année, on déterminera, à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme, le rang à partir duquel $|u_n| < 10^{-p}$ pour une valeur de p donnée.