Partie A : fonctions affines

I. Définition :

1°) Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x - 2$ est affine.

Remarques :

Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**. Ce n'est qu'un **cas particulier** de fonction affine.

Si $a = 0$, la fonction est du type $f : x \longmapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

Propriété :

Si f est affine, alors l'accroissement de la fonction ($f(x_1) - f(x_2)$) est proportionnel à l'accroissement de la variable ($x_1 - x_2$). C'est-à-dire que pour tous x_1 et x_2, $x_1 \neq x_2$: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=a$ est le taux de variation de la fonction (qu'elle soit affine ou pas) entre les valeurs x_1 et x_2.

Dans le cas des fonctions affines.

Ce taux de variation a est constant ;

Si a est positif, f est croissante sur $\mathbb{R}$;

Si a est négatif, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

II. Représentation graphique :

Théorème :

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

Et réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto 3x - 2$ admet pour représentation graphique la droite d'équation $y = 3x - 2$.

3 est le coefficient directeur de la droite.

–2 est l'ordonnée à l'origine.

Remarque :

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter aucune fonction, puisque cela signifierait qu'il existe un point qui a une infinité d'images.

III. Tableau de signes :

Théorème :

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- f a le signe de a sur $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$
- f a le signe de $-a$ sur $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$
- f est nulle en $-\frac{b}{a}$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Exemple :

$f : x \longmapsto 2x - 3$

$f(x) = 0$ revient à $2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

f est positive sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ et négative sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$

tableau de signe de f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B : Fonction polynôme du second degré

I. Définition :

1°) Définition :

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction P, définie sur $\mathbb{R}$, pouvant se ramener à la forme :

$\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée trinôme du second degré et chacun des termes $a_n x^n$ est appelé monôme de degré n.

Exemples :

$x^2 - 7x + 12$ $(a = 1 ; b = -7 ; c = 12)$

$5x^2 + 1$ $(a = 5 ; b = 0 ; c = 1)$

$4x^2$ $(a = 4 ; b = 0 ; c = 0)$

$(x + 1)(x + 2)$ peut s'écrire $x^2 + 3x + 2$

Contre-exemples :

$2x + 1$ est un binôme du premier degré

$6x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ est une expression du 3$^{\text{ème}}$ degré

$(x - 1)^2 - x^2$ est du premier degré.

2°) Racine :

Définition :

On appelle racine du trinôme toute valeur de la variable x solution de l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = \mathbf{0}$. Ce sont les valeurs qui annulent le trinôme.

Exemple :

3 est une racine du trinôme $2x^2 - 4x - 6$. En effet, $2 \times 3^2 - 4 \times 3 - 6 = 18 - 12 - 6 = 0$.

II. Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$:

1°) Équation du second degré où le trinôme est incomplet :

Définition :

On appelle trinôme incomplet un trinôme dans lequel $b = 0$ ou $c = 0$.

Exemples :

$2x^2 - 5$, ($a = 2$, $b = 0$ et $c = -5$) et $x^2 + 3x$ ($a = 1$, $b = 3$ et $c = 0$) sont des trinômes incomplets.

Méthode :

Dans ces cas-là, on sait résoudre depuis le collège :

Cas 1 : $b = 0$

On se ramène à une équation de la forme $x^2 = d$, où d est un nombre réel.

On se souvient que si $\boldsymbol{d > 0}$, il y a **2 solutions** : $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$.

si $d = 0$, il y a une seule solution : 0

et si $d < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Cas 2 : $c = 0$

On factorise par x et on résout l'équation produit nul ainsi obtenue.

Exemples :

Cas 1 :

- $2x^2 - 5 = 0$ revient à $2x^2 = 5$ revient à $x^2 = \frac{5}{2}$. L'équation a donc 2 solutions : $\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

  On écrit $S = \left\{\sqrt{\frac{5}{2}} ; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}$.

- $2x^2 + 5 = 0$ revient à $2x^2 = -5$ revient à $x^2 = -\frac{5}{2}$. L'équation n'a donc pas de solution.

  On écrit $S = \emptyset$.

Cas 2 :

- $2x^2 - 5x = 0$ revient à $x(2x - 5) = 0$. Or un produit est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $2x - 5 = 0$ soit $x = 2{,}5$.L'équation a donc 2 solutions : 0 et 2,5.

  On écrit $S = \{0 ; 2{,}5\}$.

2°) Cas général :

Théorème :

Lorsqu'on est en présence d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, on commence par identifier a, b et c.

On calcule ensuite le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle.

Si $\Delta = 0$: l'équation a une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$. On dit que cette solution est double.

Si $\Delta > 0$: l'équation possède alors 2 solutions réelles : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque :

Les formules obtenues pour $\Delta > 0$ s'étendent à $\Delta = 0$.

Exemples 1 : $x^2 - 4x + 4 = 0$. Ici $a = 1$, $b = -4$ et $c = 4$.

Commençons donc par calculer le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times4 = 0$.

$\Delta = 0$, donc cette équation a une solution qui est $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Vérification :

On remplace x par 2 dans $x^2 - 4x + 4$ pour voir si on trouve bien 0 : $2^2 - 4\times2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$.

Exemples 2 : $3x^2 - x - 4 = 0$ Ici $a = 3$, $b = -1$ et $c = -4$.

Commençons donc par calculer le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times3\times(-4) = 1 + 48 = 49$.

$\Delta > 0$, donc cette équation a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{6} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Vérification :

On remplace x par -1 et $\dfrac{4}{3}$ dans $3x^2 - x - 4$ pour voir si on trouve bien 0 :

$3\times(-1)^2 - (-1) - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$ et $3\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{4}{3} - 4 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{4}{3} - \dfrac{12}{3} = 0$.

Exemples 3 : $5x^2 + 6x + 2 = 0$ Ici $a = 5$, $b = 6$ et $c = 2$.

Commençons donc par calculer le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\times5\times2 = 36 - 40 = -4$.

$\Delta < 0$, donc cette équation n'a pas de solution réelle.

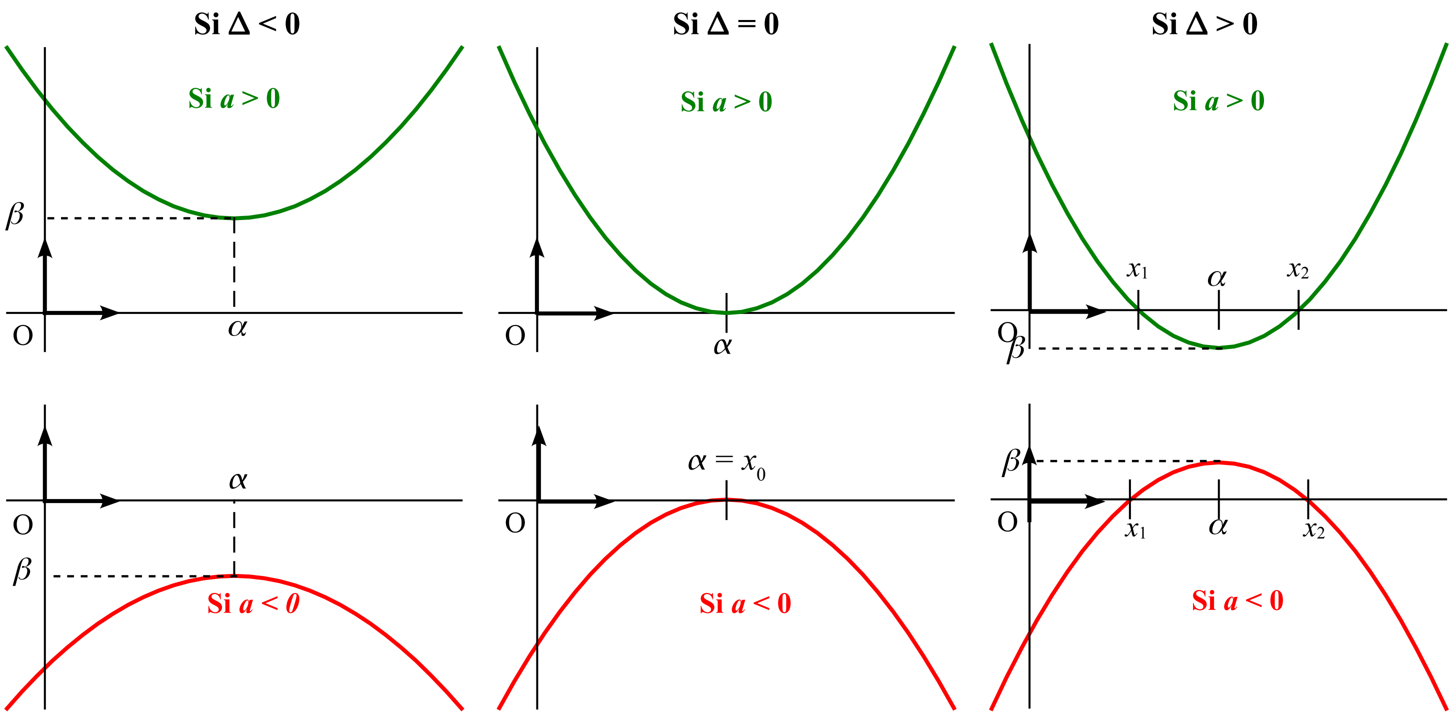
II. Signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

1°) Forme de la courbe représentative de $f(x)$:

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole dont le sommet est S $(\alpha\ ;\ \beta)$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Cette parabole est tournée vers le haut (concavité vers le haut) si $a > 0$et vers le bas si $a < 0$.



Remarque :

Ces représentations graphiques permettent d'établir le tableau de signes de f en fonction du signe de a et des éventuelles solutions de $f(x) = 0$.

2°) Signe du trinôme :

Méthode :

On commence par calculer le discriminant Δ et les éventuelles solutions de $f(x) = 0$.

Si $\Delta < 0$, $P(x)$ est toujours du signe de a

Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ est $\begin{cases} \text{du signe de } a \text{ si } x \neq x_0 \\ = 0 \text{ si } x = x_0 \end{cases}$

Si $\Delta > 0$, alors le signe de $P(x)$ est défini par le tableau de signes suivant (où l'on suppose que $x_1 < x_2$) :

x	$-\infty$ $\quad x_1$	$\quad x_2$	$\quad +\infty$
$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Signe de a	Signe de $-a$	Signe de a

Autrement dit, un polynôme est :
- du signe de $(-a)$ entre ses deux racines
- du signe de (a) ailleurs

Exemple :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - 3x - 9$.

On commence par calculer $\Delta = 9 + 4\times2\times9 = 81$. $\Delta > 0$, la courbe représentative de f coupe donc l'axe des abscisses deux fois : en $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-9}{4} = -\frac{2}{3}$ et en $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+9}{4} = 3$.

Donc, puisque $a > 0$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie C : fonction logarithme népérien

I. Définition :

La fonction logarithme népérien est LA primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 0 en 1.

Le logarithme népérien de x est noté $\ln x$.

II. Propriétés :

1°) Propriétés immédiates :

Propriété :

D'après la définition :

- $D_f =]0 ; +\infty[$;
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, qui est strictement positif sur $]0 ; +\infty[$, ce qui signifie que $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante ;
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ (avec $e \approx 2{,}718$).

De plus, comme la fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissante et que $\ln 1 = 0$, on peut en déduire que :

Propriété :

- Pour tout $x \in]0 ; 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$;
- Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.

Exemple :

On veut résoudre $\ln(x - 5) = \ln 3$. D'après la propriété précédente, $\ln(x - 5) = \ln 3 \Leftrightarrow x - 5 = 3$, c'est-à-dire $x = 8$.

2°) Propriétés algébriques :

a) Logarithme d'un produit :

Propriété : (relation fonctionnelle)

- Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple :

$\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln((\sqrt{5} + 2) \times (\sqrt{5} - 2)) = \ln(5 - 4) = \ln 1 = 0$

b) Logarithme d'un inverse, d'un quotient :

- Pour tout réel a de $]0 ; +\infty[$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Preuve :

$\ln 1 = 0$ or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$ donc $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$.

Exemple :

On veut résoudre $\ln x - \ln 5 = \ln 3 - \ln x$. Cette équation n'est définie que si $x \in]0 ; +\infty[$.

D'après la propriété précédente, $\ln x - \ln 5 = \ln 3 - \ln x \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln 15 \Leftrightarrow x^2 = 15$ c'est à dire $x = \sqrt{15}$ ou $x = -\sqrt{15}$ et comme $x \in]0 ; +\infty[$, la seule solution est donc $\sqrt{15}$.

c) Logarithme d'une puissance, d'une racine :

Propriété :

- Pour tout réel a de $]0 ; +\infty[$,et pour tout entier relatif n, on a $\ln(a^n) = n \ln a$.
- Pour tout réel a de $]0 ; +\infty[$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Exemple :

$\ln e^2 = 2 \ln e = 2$; $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$; $4 \ln \sqrt{2} = \dfrac{4}{2}\ln 2 = 2 \ln 2$.

Exemple 2 :

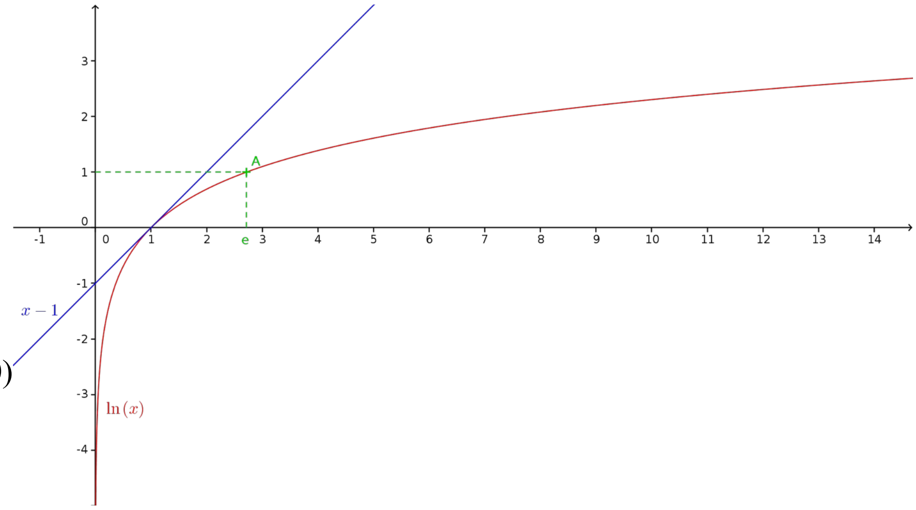
Cherchons la valeur de n à partir de laquelle 2^n est supérieure à 10^6. Pour cela, il faut résoudre l'équation suivante :

$$2^n \geqslant 10^6 \Leftrightarrow \ln 2^n \geqslant \ln 10^6 \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 10^6 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 10^6}{\ln 2}.$$

III. Représentation graphique :

Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖	$+$
$f(x) = \ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (asymptote verticale en 0)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Remarque :

Il existe un unique réel, noté e, tel que $\ln e = 1$.

Partie D : La fonction exponentielle :

I. Définition :

1°) définition :

Définition :

On appelle fonction exponentielle la fonction qui à tout réel x associe l'unique réel y tel que $\ln y = x$. (on dit qu'exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien). L'exponentielle de x est noté $\exp(x)$ ou e^x.

2°) Propriétés immédiates :

Propriétés :

$Df = \mathbb{R}$ $\quad$ $\exp(1) = e^1 = e$ (car $\ln e = 1$) $\quad$ $\exp(0) = e^0 = 1$ (car $\ln 1 = 0$)

Propriétés :

Pour tout nombre réel x :

1. $\exp(x) = e^x$ est un nombre strictement positif.
2. $\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x$.
3. Pour tout nombre réel x strictement positif : $\exp(\ln x) = e^{\ln(x)} = x$.

3°) Relation fonctionnelle :

Propriété : $\quad$ $e^{x+y} = e^x \times e^y$

Démonstration :

$x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x) \times \exp(y))$ donc $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Propriétés :

1. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;
2. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
3. $(e^x)^n = e^{nx}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration :

1. D'après la première propriété $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$ donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
2. $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x \times e^{-y} = e^x \times \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
3. $(e^x)^n = e^x \times e^x \times \ldots \times e^x = e^{nx}$.

II. Représentation graphique :

Propriété :

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle même : $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$.

Démonstration :

On dérive la relation $\ln e^x = x$. On trouve $\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $(e^x)' = e^x$.

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

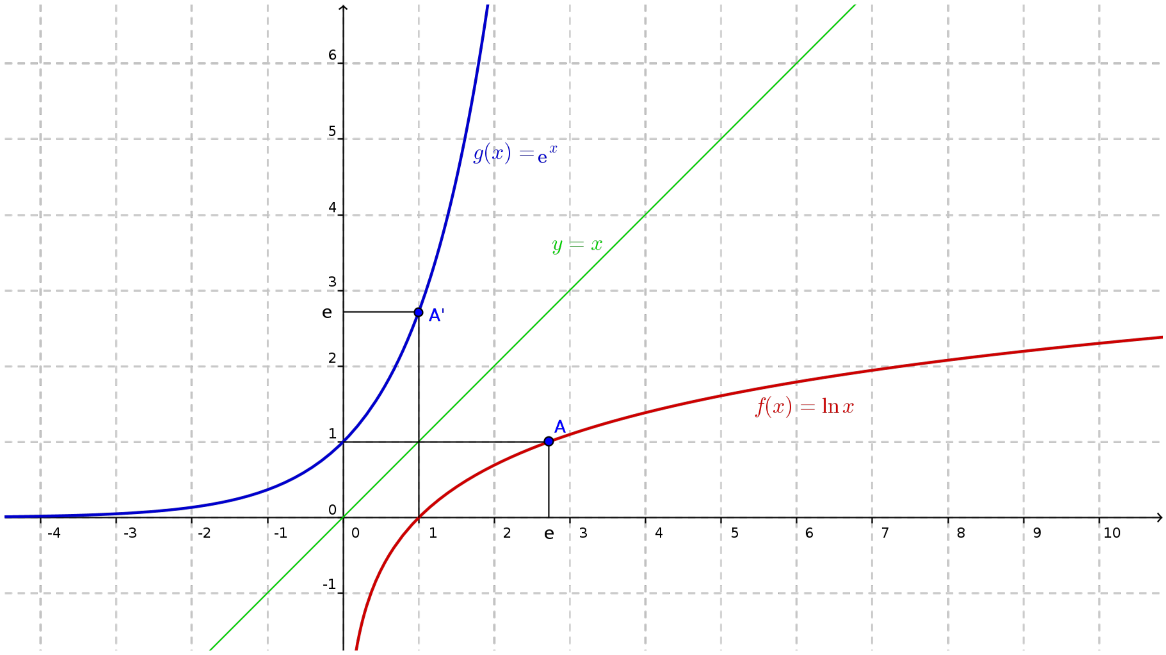
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (asymptote horizontale en $-\infty$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :

La fonction exponentielle étant la réciproque de la fonction logarithme, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).



Partie E : Fonction racine carré

I. Fonction racine carrée :

1°) Étude de la fonction :

Définition :

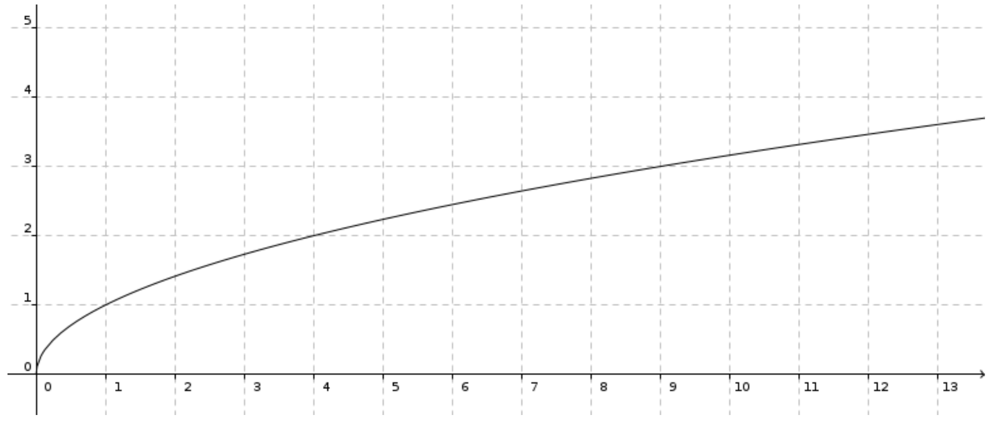
La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $x \longmapsto \sqrt{x}$

Propriété :

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗

Courbe représentative :

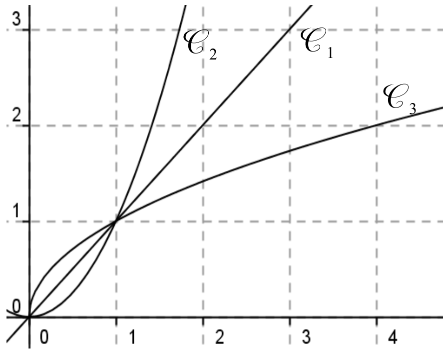


2°) Position relatives de courbes usuelles :

Propriété :

– Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$

– Pour tout réel x de [1 ; +∞[, $\sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$



Remarque :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentant les fonctions carré et racine carrée sur [0 ; +∞[sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Partie F : Fonctions trigonométriques

I. Le radian, unité de mesure d'angle :

1°) Définition :

Définition :

Le radian est une unité de mesure des angles. On note cette unité rad. La mesure d'un angle en radian est la longueur de l'arc qu'il intercepte dans le cercle trigonométrique.

Exemple :

Voici un tableau qui fait correspondre quelques valeurs d'angles en degrés avec leurs conversions en radians.

Angle en degrés	0	30	45	60	90	180
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Remarque :

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

2°) Mesure principale :

Remarque :

Un angle orienté a une infinité de mesures. La différence entre deux mesures d'un même angle est un multiple de 2π. On dit que la mesure de l'angle est définie à 2π près et on note $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha + k\times 2\pi$ ou $(\vec{u};\vec{v}) = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition :

Parmi toutes les mesures d'un angle, une seule est comprise dans l'intervalle]-π ; π[. Cette mesure est appelée la mesure principale de l'angle.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$ est $\frac{5\pi}{12}$.

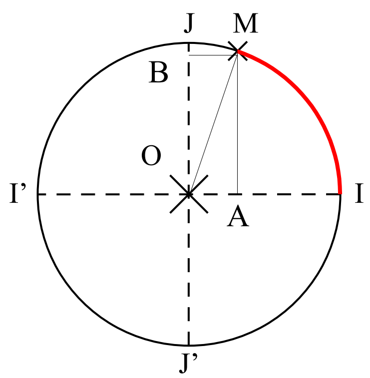
La mesure principale de $\alpha = \frac{17\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

II. Cosinus et sinus :

1°) Définition :

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé (O, I ; J).

Soit x une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ ou $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.



Dans le triangle rectangle OAM, on a :

$\cos x = \frac{OA}{OM}$

$\cos x = \frac{OA}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\cos x = OA$

donc **cos *x* est l'abscisse de M**.

De même,

$\sin x = \frac{AM}{OM} = \frac{OB}{OM}$

$\sin x = \frac{OB}{1}$ (le cercle a pour rayon 1)

$\sin x = OB$

donc **sin *x* est l'ordonnée de M**.

Exemple :

Cos 0 = 1 ; $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; sin 0 = 0 ; $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Conclusion :

Si M est le point associé au réel x sur le cercle trigonométrique, alors **M (cos *x* ; sin *x*)**.

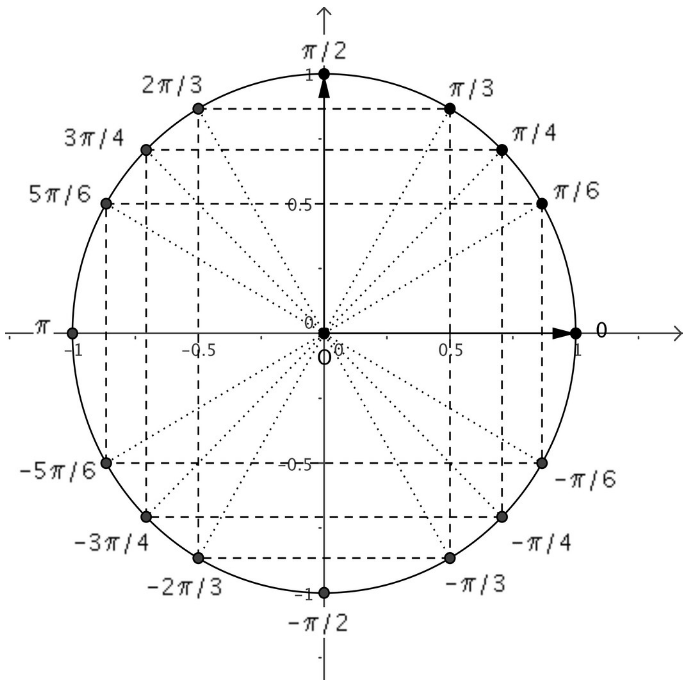
2°) Propriétés et valeurs remarquables :

Propriété :

- Pour tout x, on a $\mathbf{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ et $\mathbf{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$.
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = cos x et AM = sin x, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$ et donc : $\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$ (on rappelle que $\cos^2 x$ est une notation qui signifie $(\cos x)^2$).

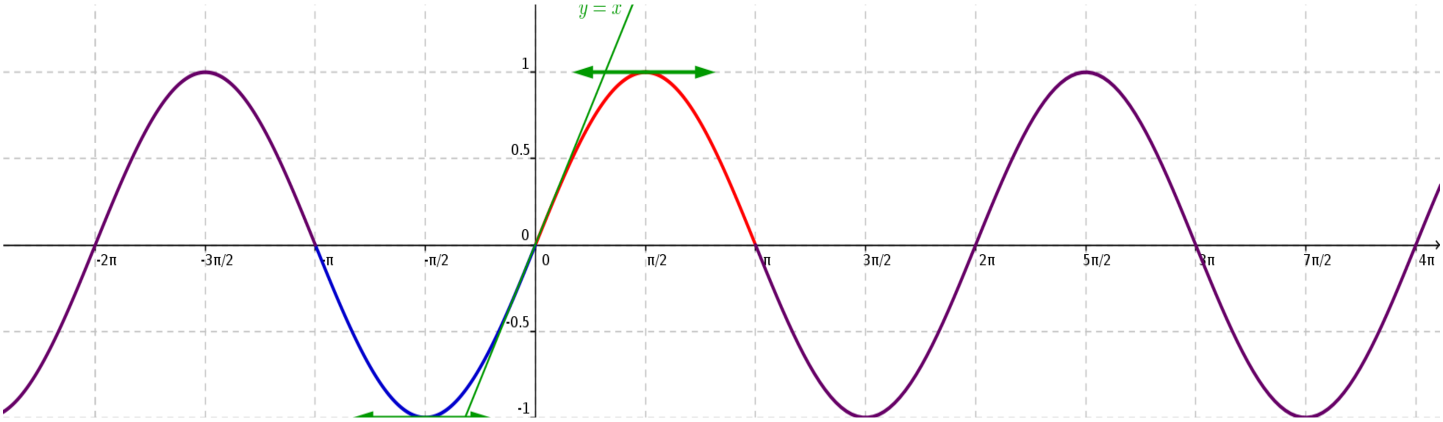
Quelques valeurs remarquables :

Angle x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos *x*	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin *x*	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



III. Fonctions sinus et cosinus :

1°) Fonction sinus :



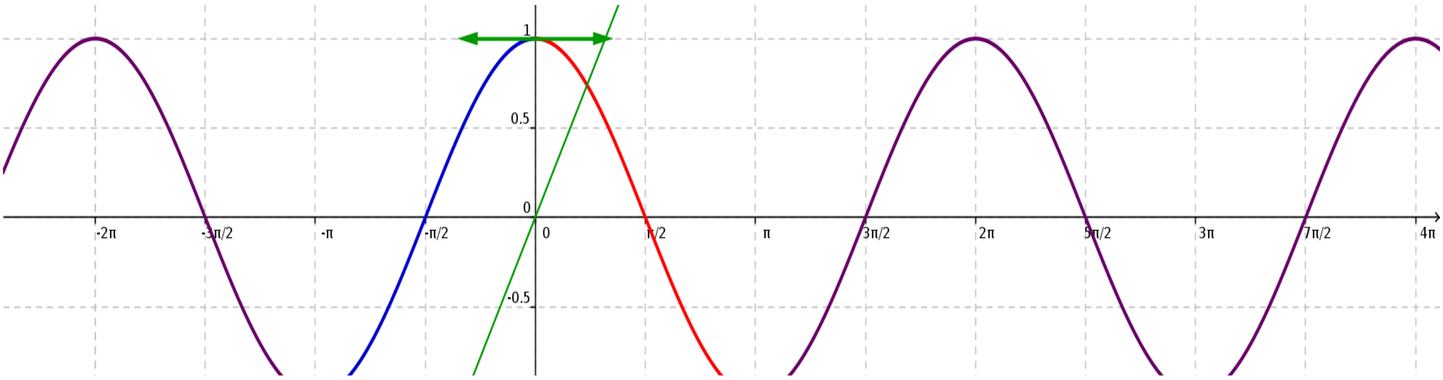
Propriété :

La fonction sinus est une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$, ce qui se traduit graphiquement par un symétrie de sa courbe représentative par rapport à l'origine du repère) et périodique de période 2π ($f(x + 2\pi) = f(x)$, ce qui se traduit graphiquement par le fait que l'on retrouve le même « motif » qui se répète).

Vocabulaire :

Cette courbe s'appelle une sinusoïde.

2°) Fonction cosinus :



Propriété :

La fonction cosinus est une fonction paire ($f(-x) = f(x)$, ce qui se traduit graphiquement par un symétrie de sa courbe représentative par rapport à l'axe des ordonnées) et périodique de période 2π ($f(x + 2\pi) = f(x)$, ce qui se traduit graphiquement par le fait que l'on retrouve le même « motif » qui se répète).

Vocabulaire :

Cette courbe s'appelle aussi une sinusoïde.