

# DÉRIVATION

## I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

### 1°) Fonctions affines (rappel) :

#### Définition :

Toute fonction affine peut s'écrire sous la forme  $f(x) = ax + b$  avec  $a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  (où  $x_1$  et  $x_2$  sont deux abscisses quelconques).

Ce nombre  $a$  est le taux d'accroissement (ou de variation) de la fonction affine, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité entre l'accroissement de  $x$  et celui de  $f(x)$ . Il correspond au coefficient directeur (la pente) de la droite qui représente la fonction. Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$ ).

#### Exemple :

Si  $f(x) = 3x + 5$ , le taux d'accroissement est 3.

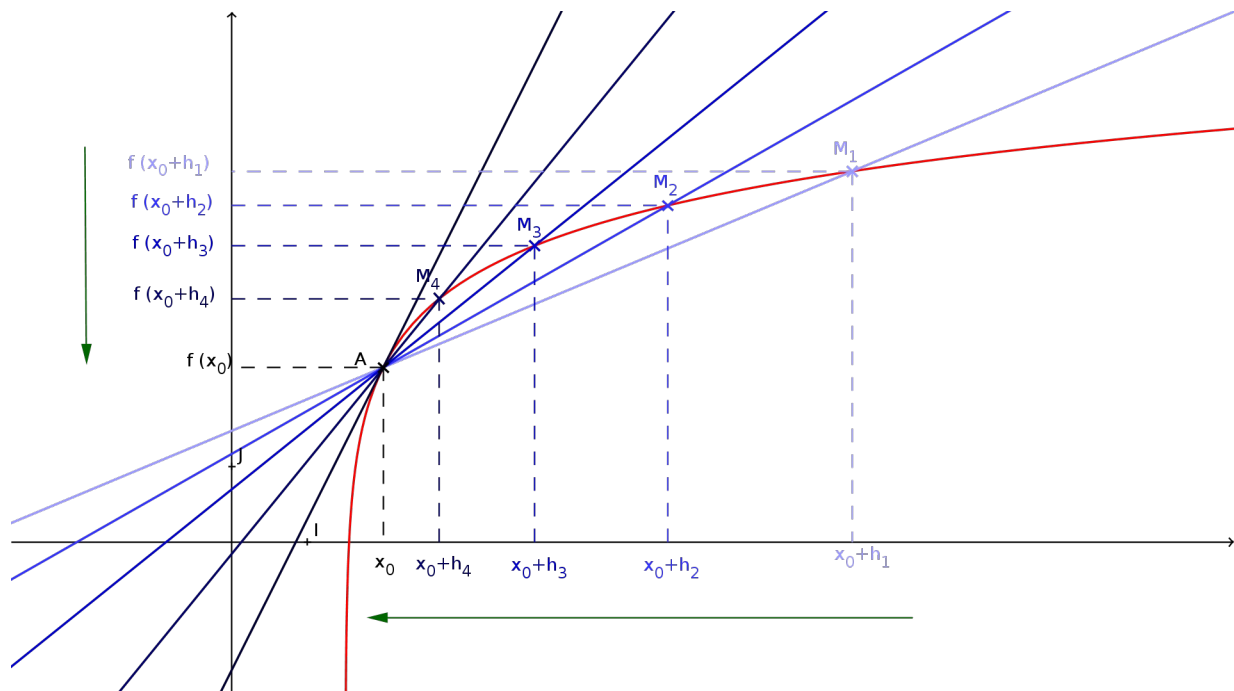
Cela signifie « quand  $x$  s'accroît de 1 unité,  $f(x)$  accroît de 3 unités ».

### 2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

#### Définition :

Soient  $f$  une fonction et  $C_f$  sa représentation graphique. Soient  $A(x_0 ; f(x_0))$  et  $M(x_0 + h ; f(x_0 + h))$  deux points de  $C_f$ .

Le taux de variation de la fonction  $f$  entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  est  $\tau = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ . C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



#### Remarque :

Plus le point  $M$  se rapproche de  $A$ , plus la droite (AM) se rapproche de la tangente  $\Delta$  à  $C_f$  en  $A$ , et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de  $\Delta$ .

### Définition :

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  et se note  $f'(x_0)$ . On écrit  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  (se lit « limite de  $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  quand  $h$  tend vers 0).

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

### Exemple :

Soit  $f$  la fonction  $x \mapsto x^2 - x + 2$ . Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{((2+h)^2 - (2+h) + 2) - (2^2 - 2 + 2)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 2 - h + 2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h} = h + 3.$$

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} h + 3 = 3$  donc  $f$  est dérivable en 2 et  $f'(2) = 3$ .

### 3°) Tangente à la courbe :

#### Propriété :

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ .

On appelle tangente à la courbe représentative de  $f$  en  $x_0$  la droite passant par le point  $A(x_0 ; f(x_0))$  et de coefficient directeur  $f'(x_0)$ .

#### Exemple :

Reprenons la fonction  $f$  précédente :  $f : x \mapsto x^2 - x + 2$ . Cherchons une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à sa courbe représentative au point A d'abscisse 2.

Le point A a pour coordonnées  $A(2 ; f(2))$  c'est-à-dire  $A(2 ; 4)$ .  $\mathcal{T}$  a pour coefficient directeur  $f'(2) = 3$  (d'après l'exemple précédent) donc  $\mathcal{T}$  a une équation réduite de la forme  $y = 3x + b$ . Or, A est un point de  $\mathcal{T}$  donc ses coordonnées vérifient son équation donc  $4 = 3 \times 2 + b$ , d'où  $b = -2$ .  $\mathcal{T}$  a donc pour équation  $y = 3x - 2$ .

## II. Dérivées des fonctions usuelles :

### 1°) Définition :

#### Définition :

On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à  $x$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$ . Cette fonction s'appelle la dérivée de  $f$  et se note  $f'$ .

#### Exemple :

Intéressons-nous à la fonction carrée :  $f(x) = x^2$ . Elle est définie sur  $\mathbb{R}$ . Est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

Pour répondre à cela, on regarde si elle est dérivable en  $a$  (réel quelconque).  $f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2$  et  $f(a) = a^2$ . Donc le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  est  $\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$ .  $2a$  est un nombre fini, donc la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 2a$ , et ce pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la fonction  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée est  $f'(x) = 2x$ .

## 2°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles :

	Domaine de définition de $f$	fonction $f$	fonction $f'$	Domaine de définition de $f'$
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$ (constante)	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
9	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{++}$
10	$\mathbb{R}^{++}$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{++}$
11	$\mathbb{R}$	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

### Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 8 peuvent se résumer en une seule formule :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}^*, \text{ si } f(x) = x^n, \text{ alors } f'(x) = nx^{n-1}.$$

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si  $n < 0$ .

### Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ . On a bien  $f(x) = x^n$  avec  $n = -3$ .

$$\text{Donc } f'(x) = nx^{n-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

### 3°) Opération sur les fonctions dérivables :

Dans le tableau ci-dessous,  $u$  et  $v$  sont des fonctions définies sur un même intervalle  $I$  et  $\lambda$  est un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
$\lambda u$	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 6x$ .
$uv$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .
$u^2$	$2u'u$	Si $f(x) = (3x^2 + 2)^2$ alors $f'(x) = 2 \times 6x \times (3x^2 + 2) = 12x(3x^2 + 2)$ .
( $u$ ne s'annule pas sur $I$ ) $\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ .
( $u$ ne s'annule pas sur $I$ ) $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4) - 4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$
( $u$ positive sur $I$ ) $\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	Si $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$ , définie sur $\mathbb{R}$ (car $2x^2 + 4 > 0$ ). On a $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x^2 + 4$ , donc $u'(x) = 4x$ . Donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x}{2x^2+4}$ .
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	Soit $f(x) = e^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ alors $f'(x) = 2x e^{x^2+1}$ .
$n$ non nul et $u$ ne s'annule pas si $n$ négatif	$u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$ Si $f(x) = (2x + 3)^3$ . On a $f(x) = (u(x))^3$ avec $u(x) = 2x + 3$ , donc $u'(x) = 2$ . On a donc $f'(x) = 3u'(x)u^2(x) = 3 \times 2 \times (2x + 3)^2 = 6(2x + 3)^2$ .

#### Exemple (modèle de rédaction) :

Soit  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Nous voulons dériver  $f$ .

$$f(x) = \frac{u}{v} \quad \text{avec } u = x^2 - 3x + 6 \quad \text{et } v = x - 1,$$

$$\text{donc } u' = 2x - 3 \quad \text{et } v' = 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$