DÉRIVATION

I. Taux d'accroissement (ou de variation) et nombre dérivé :

1°) Fonctions affines (rappel) :

Définition :

Toute fonction affine peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (où x_1 et x_2 sont deux abscisses quelconques).

Ce nombre a est le taux d'accroissement (ou de variation) de la fonction affine, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité entre l'accroissement de x et celui de $f(x)$. Il correspond au coefficient directeur (la pente) de la droite qui représente la fonction. Seules les fonctions affines ont un taux d'accroissement constant (quelles que soient les valeurs de x_1 et x_2).

Exemple :

Si $f(x) = 3x + 5$, le taux d'accroissement est 3.

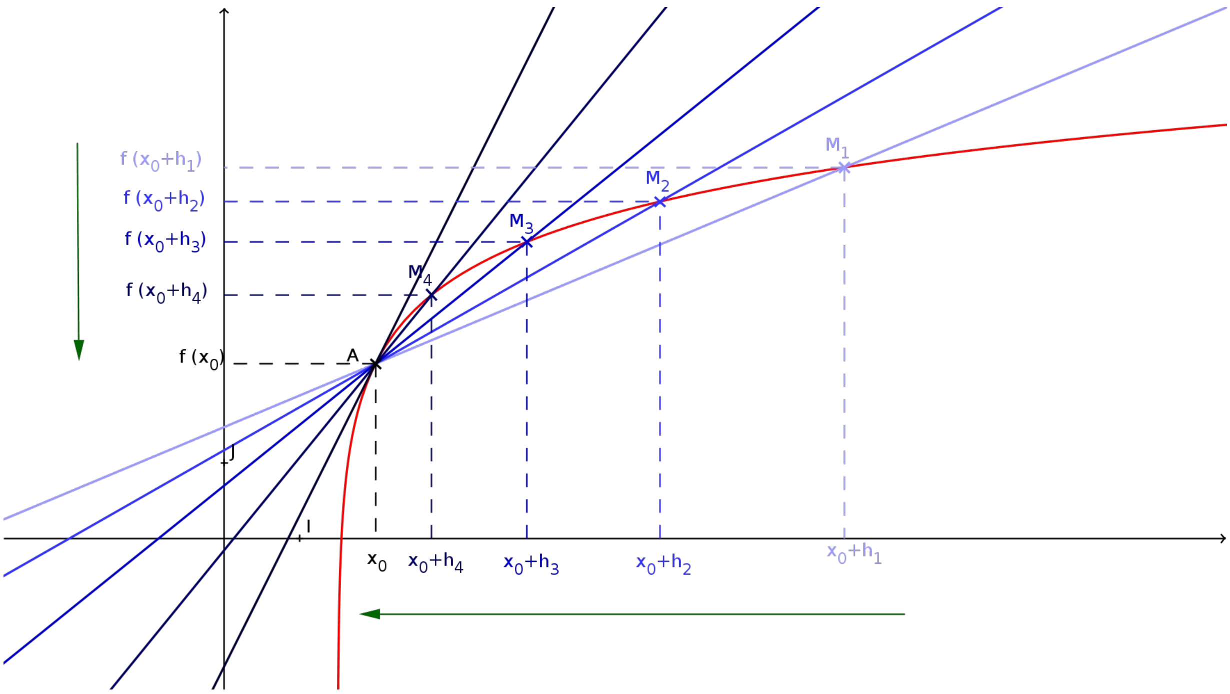
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, $f(x)$ accroît de 3 unités ».

2°) Nombre dérivé et dérivabilité :

Définition :

Soient f une fonction et C_f sa représentation graphique. Soient A(x_0 ; $f(x_0)$) et M ($x_0 + h$; $f(x_0 + h)$) deux points de C_f.

Le taux de variation de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ est $\tau = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. C'est aussi le coefficient directeur de la droite (AM).



Remarque :

Plus le point M se rapproche de A, plus la droite (AM) se rapproche de la tangente Δ à C_f en A, et donc plus ce taux de variation se rapproche du coefficient directeur de Δ.

Définition :

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$. On écrit $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (se lit « limite de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quand h tend vers 0).

Lorsque cette limite existe et est finie, on dit que la fonction f est dérivable en x_0.

Exemple :

Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 2$. Est-elle dérivable en 2 ?

$$\tau = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{((2+h)^2-(2+h)+2)-(2^2-2+2)}{h} = \frac{4+4h+h^2-2-h+2-4}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3 .$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} h+3 = 3$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 3$.

3°) Tangente à la courbe :

Propriété :

Soit f une fonction dérivable en x_0.

On appelle tangente à la courbe représentative de f en x_0 la droite passant par le point $A(x_0 ; f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Exemple :

Reprenons la fonction f précédente : $f : x \longmapsto x^2 - x + 2$. Cherchons une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à sa courbe représentative au point A d'abscisse 2.

Le point A a pour coordonnées $A(2 ; f(2))$ c'est-à-dire $A(2 ; 4)$. $\mathcal{T}$ a pour coefficient directeur $f'(2) = 3$ (d'après l'exemple précédent) donc $\mathcal{T}$ a une équation réduite de la forme $y = 3x + b$. Or, A est un point de $\mathcal{T}$ donc ses coordonnées vérifient son équation donc $4 = 3\times2 + b$, d'où $b = -2$. $\mathcal{T}$ a donc pour équation $y = 3x - 2$.

II. Dérivées des fonctions usuelles :

1°) Définition :

Définition :

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f'.

Exemple :

Intéressons-nous à la fonction carrée : $f(x) = x^2$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Pour répondre à cela, on regarde si elle est dérivable en a (réel quelconque). $f(a + h) = a^2 + 2ah + h^2$ et $f(a) = a^2$. Donc le taux de variation de f entre a et $a + h$ est $\tau = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$.

$\lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$. $2a$ est un nombre fini, donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$, et ce pour tout a de $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.

2°) Tableau des dérivées de fonctions usuelles :

	Domaine de définition de f	**fonction f**	**fonction f'**	**Domaine de définition de f'**
1	$\mathbb{R}$	$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
2	$\mathbb{R}$	$f(x) = x$ (constante)	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
3	$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
5	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
6	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
7	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
8	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
9	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
10	$\mathbb{R}^{+*}$	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
11	$\mathbb{R}$	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Remarque :

Les lignes 2 et 4 à 8 peuvent se résumées en une seule formule :

pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, si $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.

Il faut simplement faire attention au domaine de définition si $n < 0$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. On a bien $f(x) = x^n$ avec $n = -3$.

Donc $f'(x) = nx^{n-1} = -3x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$

3°) Opération sur les fonctions dérivables :

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont des fonctions définies sur un même intervalle I et λ est un nombre réel.

Fonction	Fonction dérivée	**Exemple**
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
λu	$\lambda u'$	Si $f(x) = 3x^2$ alors $f'(x) = 6x$.
uv	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
u^2	$2u'u$	Si $f(x) = (3x^2 + 2)^2$ alors $f'(x) = 2 \times 6x \times (3x^2 + 2) = 12x(3x^2 + 2)$.
(u ne s'annule pas sur I) $\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
(u ne s'annule pas sur I) $\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-4}$ alors $f'(x) = \frac{2(4x-4)-4(2x+3)}{(4x-4)^2} = \frac{-20}{(4x-4)^2}$
(u positive sur I) $\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	Si $f(x) = \ln(2x^2 + 4)$, définie sur $\mathbb{R}$ (car $2x^2 + 4 > 0$). On a $f(x) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = 2x^2 + 4$, donc $u'(x) = 4x$. Donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x}{2x^2+4}$.
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	Soit $f(x) = e^{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ alors $f'(x) = 2x\, e^{x^2+1}$.
n non nul et u ne s'annule pas si n négatif — $u^n(x)$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$	Si $f(x) = (2x + 3)^3$. On a $f(x) = (u(x))^3$ avec $u(x) = 2x + 3$, donc $u'(x) = 2$. On a donc $f'(x) = 3u'(x)u^2(x) = 3 \times 2 \times (2x + 3)^2 = 6(2x + 3)^2$.

Exemple (modèle de rédaction) :

Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$. Nous voulons dériver f.

$f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 3x + 6$ et $v = x - 1$,

donc $u' = 2x - 3$ et $v' = 1$

Donc $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.