ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Contenus :	**Capacités attendues :**	**Commentaires :**
Équations linéaires du premier ordre Équation différentielle $ay' + by = c(t)$ où a, b sont des constantes réelles et c une fonction continue à valeurs réelles.	● Représenter à l'aide d'un logiciel la famille des courbes représentatives des solutions d'une équation différentielle. ● Résoudre une équation différentielle du premier ordre : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas. ● Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée : – à la main dans les cas simples ; – à l'aide d'un logiciel de calcul formel dans tous les cas.	En lien avec les autres disciplines, on habitue les étudiants à différentes écritures : variable, fonction, notation différentielle. On présente sur un exemple la résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. Les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. En liaison avec les autres disciplines, on peut étudier des exemples simples de résolution d'équations différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables, par exemple en mécanique ou en cinétique chimique, mais ce n'est pas un attendu du programme. ⇄ Loi de refroidissement, cinétique chimique.

I. Introduction :

1°) définition :

Définition :

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s). Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

2°) Équations différentielles du premier ordre :

Définition :

On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle ne faisant intervenir que la fonction est sa dérivée.

Remarque :

Seules les équations différentielles du premier ordre sont au programme.

II. Équations différentielles du type $y' + ay = 0$:

1°) Solution générale :

Théorème :

Soit $y' + ay = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-ax} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction solution.

Démonstration :

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

● Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -ka\mathrm{e}^{-ax}$.

$$f'(x) + a f(x) = -ka\mathrm{e}^{-ax} + a \times k\mathrm{e}^{-ax} = 0 \text{ donc, } f \text{ est bien solution de (E).}$$

Les fonctions de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ sont donc des solutions de (E).

● Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, on suppose que g est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) et on va montrer qu'alors elle est de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-ax}$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{ax}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{ax} + ag(x)\mathrm{e}^{ax} \Leftrightarrow h'(x) = \mathrm{e}^{ax}(g'(x) + ag(x))$.

Mais comme g est solution de (E), on a $g'(x) + ag(x) = 0$ soit $h'(x) = 0$, ce qui signifie que h est une constante.

$$\text{On a alors : } h(x) = k \Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{ax} = k \Leftrightarrow g(x) = k\mathrm{e}^{-ax}.$$

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle : $y' + 4y = 0$:

➔ Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{-4x}$ où k est une constante réelle. Par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-4x}$ ou $f(x) = 2\mathrm{e}^{-4x}$ ou encore $f(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4x}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

Résolution de l'équation différentielle : $y' = 3y$:

➔ Cette équation peut s'écrire $y' - 3y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ où k est une constante réelle.

Remarque :

Les équations différentielles de la forme $\alpha y' + \beta y = 0$ où α et β sont des nombres réels se ramène à celles du type $y' + ay = 0$ avec $a = \frac{\beta}{\alpha}$.

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 0$:

➔ Cette équation peut s'écrire $y' + \frac{5}{2}y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}$ où k est une constante réelle.

2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

Théorème :

Soient x_0, y_0 et a des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = 0$ admet une unique solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Cette solution est la fonction définie par $f(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-a(x - x_0)}$.

Démonstration :

On sait que la solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ est une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$ où k est un nombre réel.

De plus, $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{-ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$.

D'où $f(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}\mathrm{e}^{ax} = y_0\,\mathrm{e}^{a(x - x_0)}$.

Remarque :

Concrètement, il est inutile d'apprendre par cœur la forme de la solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ avec une condition initiale ($f(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-a(x - x_0)}$). On dira que cette solution est une solution particulière et on refera à chaque fois la démarche pour trouver la valeur de k qui convient.

Exemple 1 :

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution f vérifie $f(0) = 1$:

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où k est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de k convient pour que $f(0) = 1$:

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$,

D'où $f(x) = e^{-2x}$.

Exemple 2 :

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution f vérifie $f(2) = 4$:

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où k est une constante réelle.

➔ Solution particulière : on a $f(2) = 4 \Leftrightarrow ke^{-2\times 2} = 4 \Leftrightarrow k = 4e^4$,

D'où $f(x) = 4e^4e^{-2x}$ que l'on peut aussi écrire $f(x) = 4e^{-2x+4}$ ou encore $f(x) = 4e^{-2(x-2)}$ (on retrouve là la forme donnée dans le théorème).

III. Équations différentielles du type $y' + ay = b$:

1°) Solution générale :

Théorème (admis) **:**

Soit $y' + ay = b$ une équation différentielle du premier ordre ou a et b sont des réels avec $a \neq 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Remarque :

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de k correspond une fonction.

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle : $y' + 4y = 3$:

➔ Les solutions sont du type $f(x) = ke^{-4x} + \frac{3}{4}$ où k est une constante réelle.

Par exemple, $f(x) = e^{-4x} + \frac{3}{4}$ ou $f(x) = 2e^{-4x} + \frac{3}{4}$ ou encore $f(x) = -\frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{3}{4}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

Vérifions : $f(x) = ke^{-4x} + \frac{3}{4}$, donc $f'(x) = -4ke^{-4x}$.

On a donc $f'(x) + 4f(x) = -4ke^{-4x} + 4\left(ke^{-4x} + \frac{3}{4}\right) = -4ke^{-4x} + 4ke^{-4x} + 3 = 3$.

Remarque :

Les équations différentielles de la forme $\alpha y' + \beta y = \gamma$ où α, β et γ sont des nombres réels se ramène à celles du type $y' + ay = b$ avec $a = \frac{\beta}{\alpha}$ et $b = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 4$ revient à $y' + 2{,}5y = 2$.

2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

Théorème (admis) **:**

Soient x_0, y_0, a et b des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple :

Résolution de l'équation différentielle $y' = -5y + 2$ telle que $f(0) = 1$:

Remarquons tout d'abord que cette équation s'écrit aussi $y' + 5y = 2$

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$ où k est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de k convient pour que $f(0) = 1$:

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{-5\times 0} + \frac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow k + \frac{2}{5} = 1$ soit $k = \frac{3}{5}$.

D'où $f(x) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$.

IV. Équations différentielles du type ay' + by = c (t) :

1°) Solution générale :

Théorème (admis) **:**

Soient a et b des réels donnés et $c(x)$ une fonction.

Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = c(x)$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de $ay' + by = c(x)$ et la solution générale de l'équation sans second membre associée à $ay' + by = 0$.

Remarque :

La méthode pour résoudre ces équations différentielles est induite par ce théorème :

1- On commence par trouver une solution de $ay' + by = c(x)$. L'énoncé vous guidera soit en vous donnant une solution qu'il vous suffira de vérifier, soit en vous donnant des indications qu'il faudra suivre.

2- Ensuite on résout $ay' + by = 0$ (voir ***II.***)

3- Enfin, on ajoute les deux fonctions trouvées.

Exemple :

Problème :

Résolution de l'équation différentielle : $y' + y = 2x + 3$ (E) :

1°) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$ est une solution de (E).

2°) Résoudre $y' + y = 0$.

3°) En déduire l'ensemble des solution de (E).

Solution :

1°) $g(x) = 2x + 1$, donc $g'(x) = 2$, donc $g'(x) + g(x) = 2x + 1 + 2 = 2x + 3$. Donc g est bien solution de (E).

2°) $y' + y = 0$ est une équation de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 1$, ses solutions sont donc les fonctions de la forme $y_0(x) = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3°) L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = ke^{-x} + 2x + 3$.

2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

Théorème (admis) **:**

Soient x_0, y_0, a et b des réels donnés et $c\,(x)$ une fonction. L'équation différentielle $ay' + by = c\,(x)$ admet une unique solution f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f\,(x_0) = y_0$.

Exemple :

Déterminer la solution f l'équation différentielle : $y' + y = 2x + 3$ (E) telle que $f\,(1) = 6$.

D'après le 1°), f est de la forme $f\,(x) = k\mathrm{e}^{-x} + 2x + 3$. $f\,(1) = 6$ s'écrit alors $k\mathrm{e}^{-1} + 2\times1 + 3 = 6$ soit $k\mathrm{e}^{-1} = 1$. Autrement dit $k = \mathrm{e}$.

$f\,(x) = \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x} + 2x + 3 = \mathrm{e}^{-x+1} + 2x + 3$.

V. Différentes notations :

En physique, la position ou l'évolution d'un système dépend du temps, la variable est donc t. On cherche alors une fonction $f : t \longmapsto f\,(t)$. On l'écrit souvent $t \longmapsto x\,(t)$ ou $t \longmapsto y\,(t)$, et la dérivée par rapport au temps s'écrit $x'\,(t) = \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}x(t)$.

L'équation différentielle $y' + y = 2x + 3$ par exemple, peut s'écrire alors

$x'\,(t) + x\,(t) = 2t + 3$ ou $\dot{x}(t) + x\,(t) = 2t + 3$ ou $\dfrac{dx}{dt} + x = 2t + 3$ ou $\dfrac{d}{dt}x(t) + x\,(t) = 2t + 3$

Mais dans tous les cas, il s'agit de la même équation.