CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

I. Rappels :

Vous devez savoir ce qu'est une expérience aléatoire, une issue, un événement (élémentaire, contraire, événements incompatibles, union, intersection d'événements). Probabilité : définition, équiprobabilité, probabilité des événements cités ci-avant.

II. Probabilités conditionnelles :

1°) Définition :

Définition :

Soit A un événement de l'univers Ω muni de la loi P tel que $P(A) \neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle loi de probabilité notée P_A en posant pour tout événement B :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

P_A est appelée probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. $P_A(B)$ se lit P de B sachant A.

Remarque :

Comme $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a aussi $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

La réalisation de $A \cap B$ s'obtient en réalisant A, puis B sachant que A est réalisé.

Exemple :

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard et sans remise deux boules. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Considérons les événements A : « la première boule est rouge » et B : « la deuxième boule est rouge ».

Tirer deux boules rouges correspond à l'événement $A \cap B$. Calculer $P(A \cap B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Or $P(A) = \frac{5}{8}$ (5 boules rouges parmi 8) et $P_A(B) = \frac{4}{7}$ (après le tirage de la première boule rouge, il reste 4 boules rouges parmi 7).

Ainsi, $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$.

2°) Formule de probabilité totale :

Propriété :

On considère des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formant une partition de l'univers Ω (leur réunion donne et ils sont deux à deux disjoints).

Alors pour tout événement B, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$, avec pour tout i pris entre 1 et n, $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.

Exemple :

Une urne U_1 contient 1 boule rouge et 5 boules vertes, une urne U_2 contient 3 boules rouges et une boule verte, une urne U_3 contient 1 boule rouge et 2 boules vertes.

On choisit l'une des urnes au hasard et on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

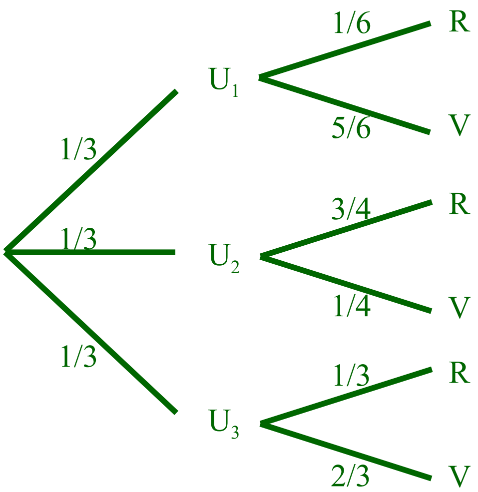
Appelons U_1 , U_2 et U_3 les événements correspondants au choix de l'urne. Ils forment une partition de l'univers et on a $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$.

Soit B l'événement « tirer une boule rouge ». La formule des probabilités totales nous donne
$P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap B)$,
Donc $P(B)=P(U_1)\times P_{U_1}(B)+P(U_2)\times P_{U_2}(B)+P(U_3)\times P_{U_3}(B)$.

Or $P_{U_1}(B)=\frac{1}{6}$; $P_{U_2}(B)=\frac{3}{4}$; $P_{U_3}(B)=\frac{1}{3}$.

On a donc $P(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

On peut retrouver ce résultat en utilisant un arbre de probabilités :



On applique les règles suivantes :

• On a une probabilité sur la première branche, puis des probabilités conditionnelles sur les branches suivantes.

• Tous les chemins partant d'un événement forment une partition de cette événement.

• La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités marquées sur ses branches.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Ainsi une simple lecture de l'arbre nous donne le résultat $P(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$.

III. Indépendance :

Définition :

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

Cela équivaut à dire que si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = P(B)$.

Preuve :

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B)$.

Remarque :

Il est naturel de dire que A et B sont indépendants si la probabilité de B est la même que la probabilité de B sachant A, autrement dit que la probabilité que B se réalise est la même que A se réalise ou non.

Exemple :

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci de façon indépendante de l'autre moteur. Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Soient A l'événement « le premier moteur tombe en panne » et B l'événement « le second moteur tombe en panne ».

Alors $A \cap B$ est l'événement « les deux moteurs tombent en panne ».

Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 10^{-8}$. L'événement contraire, $\overline{A \cap B}$, signifie qu'au moins l'un des moteurs n'est pas tombé en panne, donc que l'avion arrive à bon port.

On a $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 10^{-8}$.