LIMITES DE FONCTIONS

I. Limite infinie en une valeur a ($a \in \mathbb{R}$) :

1°) Définition :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\ ;\ a[$ ou $]a\ ;\ +\infty[$.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par des valeurs inférieures lorsque $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a en restant inférieur à a dans D_f.

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

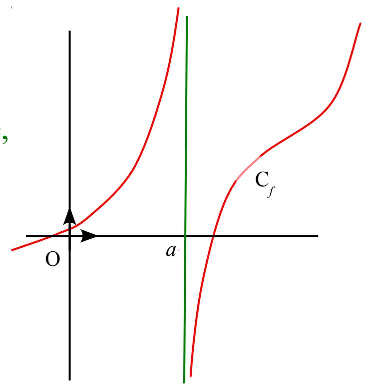
On a la même définition lorsque x tend vers a par des valeurs inférieures à a.

On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

On a également les mêmes définitions et notations lorsque $f(x)$ tend vers $-\infty$:

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Exemple :



Pour la fonction dont nous avons la représentation graphique ci-contre, nous avons

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

2°) Limites de référence :

Théorème :

Limites de référence (admis)

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

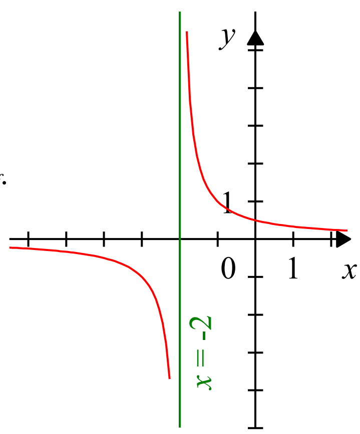
3°) Asymptote verticale :

Définition :

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f.

Exemple :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.

Conséquence pour la courbe : la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

II. Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$:

1°) Limites finie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Définition :

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ lorsque que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proche que l'on veut de L pour x suffisamment grand.

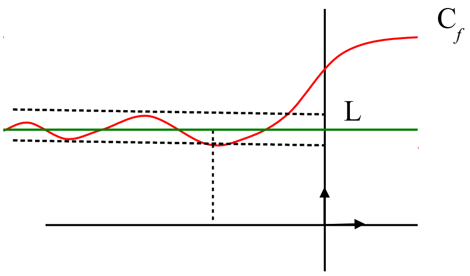
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{L}$.

On dit que la droite (d) d'équation $y = \text{L}$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.

On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$ lorsque que $f(x)$ peut prendre des valeurs aussi proche que l'on veut de L pour x suffisamment petit et négatif.

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \text{L}$.

On dit que la droite (d) d'équation $y = \text{L}$ est une asymptote à C_f en $-\infty$.



Théorème :

Limites de référence (admis)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$

2°) Limites infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$:

Définition :

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ veut dire que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut quand x devient très grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Dire que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ veut dire que $-f(x)$ devient aussi grand que l'on veut quand x devient très grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème :

Limites de référence (admis)

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$.

De façon analogue, on peut définir la limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x| = +\infty$.

Il faut également savoir :

- si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b = -\infty$.
- si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} ax+b = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} ax+b = +\infty$.

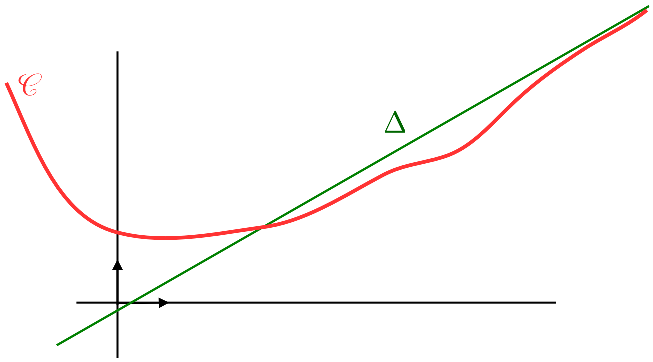
3°) Asymptote oblique :

Définition :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - (ax+b) \right) = 0$, on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

Remarque :

Ces deux limites signifient que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite Δ, courbe représentative d'une fonction affine $g(x) = ax + b$



Remarque :

Cette asymptote n'est ni verticale, ni horizontale. On parle alors d'asymptote oblique.

III. Opérations sur les limites :

On considère deux fonctions f et g de limite connue en a. a désigne soit un nombre (y compris 0), soit $+\infty$ soit $-\infty$.

1°) Limite d'une somme :

$f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$(f(x) + g(x))$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

2°) Limite d'un produit :

$f(x)$	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	□∞
$(f(x).g(x))$	L×L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

3°) Limite d'un quotient :

	Cas où la limite de g n'est pas nulle							**Cas où la limite de g est nulle**				
$f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0
$g(x)$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

4°) cas particuliers : Polynômes et fonctions rationnelles :

Propriétés :

En cas de forme indéterminée, la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

En cas de forme indéterminée, la limite d'une fonction rationnelle (quotient de fonctions polynômes) en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty} 5x^3-2x^2+3 = \lim_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-x+2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty.$$

IV. Limite de f (u(x)) et de (u (x))ⁿ :

1°) Limite de $f(u(x))$:

Propriété :

Soient deux fonctions : u définie de I dans J et f de J dans $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim_{x\to b} f(x) = c$, alors $\lim_{x\to a} f(u(x)) = c$.

Exemples :

$\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

donc $\lim_{x\to 1} x^2+x+2 = 4$ et $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$ donc $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+x+2} = 2$.

2°) Limite de $(u(x))^n$:

Propriété :

n est un entier naturel non nul et l est un réel.

$\lim_{x \to l} x^n = l^n$

Si n est pair, $\lim_{x \to +\infty} x^n = \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

Si n est impair, $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Exemples :

$\lim_{x \to 3} x^3 = 27$; $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

Propriété :

Si $\lim_{x \to a} u(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} (u(x))^n = l^n$.

Si $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} (u(x))^n = +\infty$.

Si $\lim_{x \to a} u(x) = -\infty$ alors si n est pair $\lim_{x \to a} (u(x))^n = +\infty$.

si n est impair $\lim_{x \to a} (u(x))^n = -\infty$.

Exemple :

On cherche la limite de $(-2x + 3)^9$ en $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} -2x+3 = -\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} (-2x+3)^9 = -\infty$.