

LOI BINOMIALE

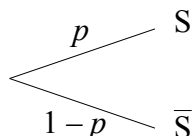
I. Schéma de Bernoulli :

1°) Épreuve de Bernoulli :

Définition :

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues.

- L'une est appelée succès, de probabilité p , notée S.
- L'autre est appelée échec, de probabilité $1 - p$, notée E ou \bar{S} .



Exemple :

Une question d'un QCM est composée de 4 réponses, dont une seule est correcte. En répondant totalement au hasard, un candidat a une probabilité de répondre juste de $\frac{1}{4}$. Celle de répondre faux est donc de $\frac{3}{4}$. On appelle succès l'événement « répondre juste » et échec « répondre faux ».

Cette expérience qui ne comporte que deux issues est donc une épreuve de Bernoulli.

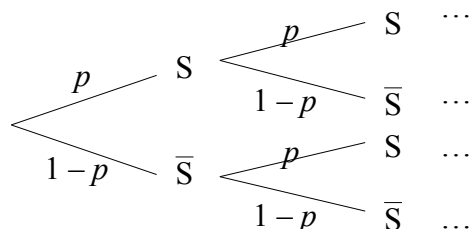
2°) Schéma de Bernoulli :

Définition :

On appelle schéma de Bernoulli toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois la même épreuve de Bernoulli de façon indépendante (c'est à dire dans les mêmes conditions, les résultats des premières épreuves n'influent pas sur les résultats des suivantes). On dit que le schéma de Bernoulli est de paramètre n (le nombre de répétitions) et p (la probabilité du succès).

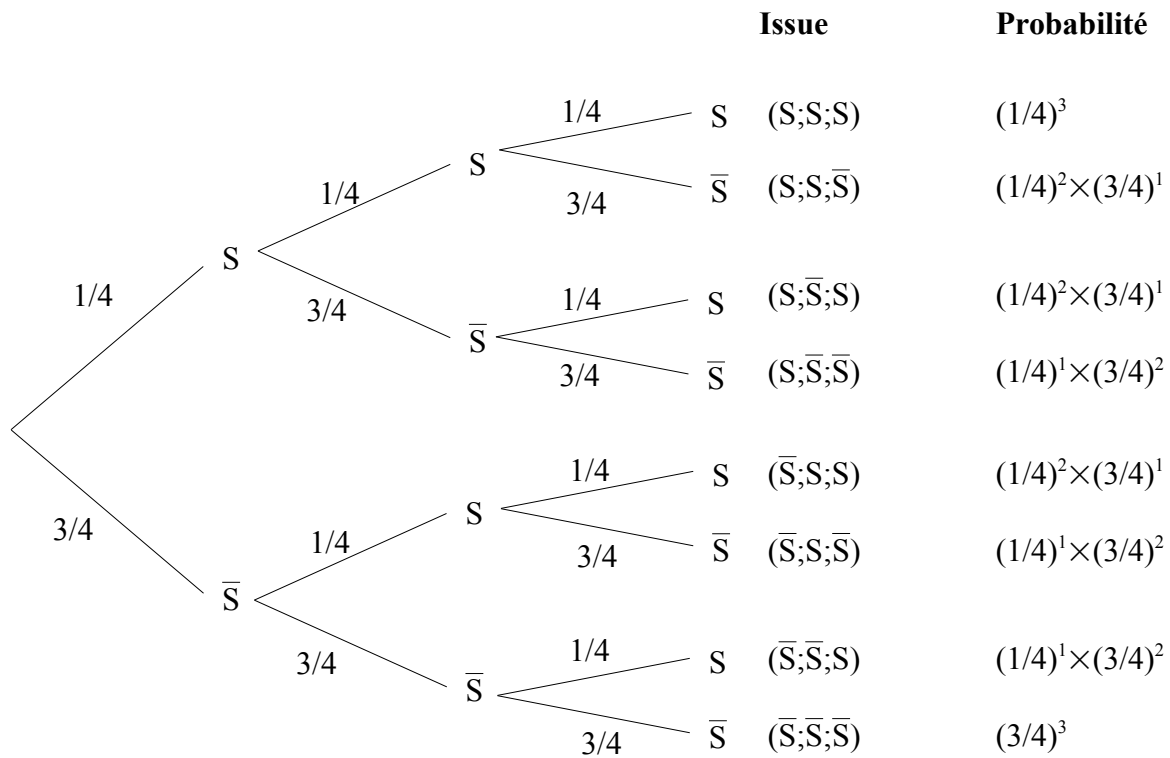
Remarque :

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est donc une liste de n issues qui sont soit des succès, soit des échecs. Exemple : {S ; E ; S ; S ; ... ; S ; E ; E} .



Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : un exercice comporte 3 questions. On est donc en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$. On peut représenter les éventualités sur un arbre pondéré :



II. Loi binomiale :

1°) Loi binomiale :

Définition :

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de paramètres n (nombre de répétitions) et p (probabilité du succès). La loi de probabilité de la variable X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Exemple :

Reprenons l'exemple de l'exercice de QCM avec 3 questions comportant chacune 4 réponses possibles, une seule d'entre elles étant correcte. La variable aléatoire X qui correspond au nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,25$ (c'est-à-dire $\mathcal{B}(3 ; 0,25)$). Le nombre de bonnes réponses varie de 0 à 3 donc $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$. On obtient la loi de probabilité suivante :

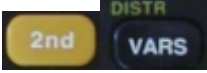
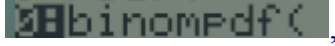
Valeur de $X(x_i)$	0	1	2	3
$p(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

Remarque :

$p(X=1) = p(\{(S ; \bar{S} ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; S ; \bar{S}) ; (\bar{S} ; \bar{S} ; S)\})$. Nous remarquons que chacun des événements élémentaires qui composent cet événement a la même probabilité : $\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (1 succès, 2 échecs).

2°) Calcul de probabilités :

Méthode :

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, si l'on veut calculer $p(X = k)$, on utilise la calculatrice. Sur la TI, on va dans  puis on choisit la fonction , s'appelant aussi **0:binomFdp**(ou **A:binomFdp**(sur les modèles en français. Enfin on saisit les paramètres n, p et k dans cet ordre séparés par des virgules. On obtient **binompdf**(n,p,k) ou **binomFdp**(n,p,k). Certains modèles plus récents ont une utilisation plus intuitive dès que la fonction **binomFdp**(est choisie.

Exemple :

La probabilité qu'un candidat qui répond totalement au hasard à l'exercice de QCM obtienne exactement 2 bonnes réponses est **binompdf**(**3,0.25,2**) = 14,0625. Donc $p(X = 2) \approx 14\%$.

Remarque :

Si on veut calculer $p(X \leq k)$, dans le même menu on utilise la fonction **binomFRép**(, située juste en dessous de la précédente.

2°) Espérance et variance :

Exemple :

Reprenons la loi de probabilité de notre exemple $\mathcal{B}(3 ; 0,25)$:

Valeur de $X(x_i)$	0	1	2	3
$p(X = x_i) = p_i$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc de

$$E(X) = 0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,75.$$

On remarque que $E(X) = 3 \times 0,25 = np$. Cette constatation peut être généralisée :

Propriété (admise) :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$. Alors

- l'espérance est $E(X) = n \times p$;
- la variance est $V(X) = np(1 - p)$.