Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **STS 2**
Prénom :

CORRIGÉ

Durée : 2 heures

La calculatrice doit être en mode examen

Exercice 1 **10 points**

Dans cet exercice on s'intéresse à un flotteur réalisé en plastique allégé.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : y' - y = -\mathrm{e}^x,$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0)\ y' - y = 0.$$

(E_0) est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = -1$, ses solutions sont donc les fonctions de la forme $y_0(x) = C\mathrm{e}^{-ax} = C\mathrm{e}^x$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^x$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$h = uv$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Donc $h' = u'v + uv'$, donc $h'(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -(x+1)\mathrm{e}^x$.

Donc $h'(x) - h(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x$. h est donc bien une solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

L'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions $g(x) = y_0(x) + h(x) = C\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$.

4. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

$f(x) = C\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x$. $f(0) = C\mathrm{e}^0 - 0\mathrm{e}^0 = C = 2$. Donc $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité graphique est 2 centimètres.

1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2\ ;\ 2]$.

$f = uv$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$, donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Donc $f' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x$.

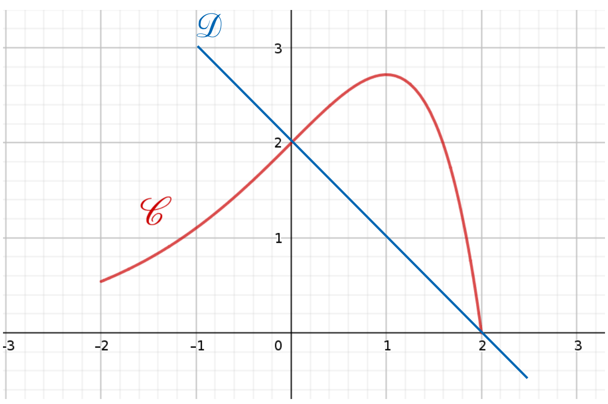
b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[-2\ ;\ 2]$.

$\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ c'est-à-dire positive sur $[-2\ ;\ 1]$ et négative sur $[1\ ;\ +2]$.

c. Établir le tableau de variation de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

$f(-2) = 4\mathrm{e}^{-2}$ ($\approx 0{,}54$) et $f(2) = 0$. $f(1) = \mathrm{e}$.

x	-2		1		$+2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0



2. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur le papier millimétré ci-dessous.

3. a. Résoudre algébriquement dans $[-2\ ;\ 2]$ l'inéquation $f(x) > 2 - x$.

$f(x) > 2 - x$

$\Leftrightarrow (2 - x)e^x > 2 - x$

$\Leftrightarrow e^x > 1$ (car $2 - x$ est positif sur $[-2\ ;\ 2]$)

$\Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $S =]0\ ;\ 2]$.

b. Retrouver graphiquement le résultat du **3. a.** On fera apparaître sur la figure du 2 les constructions utiles.

Il suffit de tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$ et de regarder sur quel intervalle $\mathscr{D}$ est en dessous de $\mathscr{C}$.

4. a. Démontrer que la fonction F définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$ est une primitive sur $[-2\ ;\ 2]$ de la fonction $x \longmapsto [f(x)]^2$.

$F(x) = uv$ avec $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}$ et $v(x) = e^{2x}$, donc $u'(x) = x - \frac{5}{2}$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.

Donc $f' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right) \times 2e^{2x}$

$= \left(x - \frac{5}{2} + x^2 - 5x + \frac{13}{2}\right)e^{2x} = (x^2 - 4x + 4)e^{2x}$.

$[f(x)]^2 = [(2 - x)e^x]^2 = (x^2 - 4x + 4)e^{2x}$.

$F'(x) = [f(x)]^2$ donc $F(x)$ est bien une primitive de $[f(x)]^2$.

b. Application :

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

Le solide obtenu est utilisé pour réaliser un modèle de flotteur en plastique allégé.

On admet que le volume $\mathscr{V}$, en unités de volume, du solide S est :

$$\mathscr{V} = \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2 \, dx$$

Établir que $\mathscr{V} = \frac{\pi}{4}(e^4 - 41e^{-4})$.

$\mathscr{V} = \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2 \, dx = \pi\, [F(x)]_{-2}^{2} = \pi \left(\left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{5}{2}2 + \frac{13}{4}\right)e^4\right) - \left(\left(\frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{5}{2}(-2) + \frac{13}{4}\right)e^{-4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}\left((8 - 20 + 13)e^4 - (8 + 20 + 13)e^{-4}\right) = \frac{\pi}{4}(e^4 - 41e^{-4})$.

c. Donner la valeur approchée de $\mathscr{V}$ en cm^3 arrondie à 10^{-3}.

1 unité = 2 cm, donc 1 unité^3 = 8 cm^3, on a donc $\mathscr{V} = 2\pi(e^4 - 41e^{-4}) \approx 338{,}332$ cm^3.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Dans cet exercice, on s'intéresse au contrôle de la qualité de la fabrication du modèle de flotteur décrit dans l'exercice 1.

A. Loi binomiale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.

On considère un stock important de flotteurs.

On dit qu'un flotteur est acceptable si sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[24{,}5\ ;\ 25{,}5]$.

On prélève au hasard un flotteur dans le stock. On note E l'événement : « le flotteur prélevé dans le stock est acceptable ».

On suppose que P (E) = 0,6. On prélève au hasard n flotteurs dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de n flotteurs à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de flotteurs acceptables dans le prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale. Ses paramètres sont n et $p = 0,6$.

2. Dans cette question, on suppose $n = 6$.

a. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux flotteurs exactement soient acceptables.

$P(X = 2) \approx 0,14$

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux flotteurs soient acceptables.

$P(X \leqslant 2) \approx 0,18$

3. Dans cette question, on considère un prélèvement de n flotteurs.

a. Donner, en fonction de n l'expression de $P(X = 0)$.

$P(X = 0) = 0,4^n$.

b. Soit F l'événement : « dans le prélèvement, au moins un flotteur est acceptable ».
Calculer la valeur minimale n_0 de n telle que P (F) > 0, 95.

F est l'événement contraire du précédent, donc $P(F) = 1 - 0,4^n$.

On résout donc $1 - 0,4^n > 0,95 \Leftrightarrow -0,4^n > -0,05 \Leftrightarrow 0,4^n < 0,05 \Leftrightarrow n \ln 0,4 < \ln 0,05$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,4} \Leftrightarrow n > 3,26$. Donc $n_0 = 4$.

B. Loi normale

Dans cette partie les résultats sont à arrondir 10^{-2} près.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 0,58.

1. Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse comprise entre 24,5 et 25,5 grammes.

$P(24,5 \leqslant Y \leqslant 25,5) \approx 0,61$.

2. En déduire la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 24,5 grammes.

$P(Y \leqslant 24,5) = \dfrac{1 - P(24,5 \leqslant Y \leqslant 25,5)}{2} \approx 0,195 \approx 0,19$.

C. Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, les résultats sont à arrondir à 10^{-4} près.

Les flotteurs sont fabriqués par deux machines notées M_1 et M_2. 60 % des flotteurs proviennent de la machine M_1 et 40 % proviennent de la machine M_2.

On admet que 1,3 % des flotteurs provenant de la machine M_1 sont défectueux et que 1,8 % des flotteurs provenant de la machine M_2 sont défectueux.

On prélève au hasard un flotteur dans la production d'un mois. On considère les événements suivants :

A_1 : « le flotteur provient de la machine M_1 » ;

A_2 : « le flotteur provient de la machine M_2 » ;

D : « le flotteur est défectueux ».

1. Déterminer P (A_1), P (A_2) , $P_{A_1}(D)$ et $P_{A_2}(D)$.

On rappelle que $P_{A_1}(D)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

D'après l'énoncé, P (A_1) = 0,6, P (A_2) = 0,4, $P_{A_1}(D)$ = 0,013 et $P_{A_2}(D)$ = 0,018.

2. a. Calculer les valeurs exactes des probabilités P ($A_1 \cap D$) et P ($A_2 \cap D$).

P ($A_1 \cap D$) = P (A_1)× $P_{A_1}(D)$ = 0,6×0,013 = 0,0078

P ($A_2 \cap D$) = P (A_2)× $P_{A_2}(D)$ = 0,4×0,018 = 0,0072

b. En déduire la valeur exacte de la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production du mois soit défectueux.

P (D) = P ($A_1 \cap D$) + P ($A_2 \cap D$) = 0,015

3. Calculer la probabilité qu'un flotteur provienne de la machine M_1 sachant qu'il est défectueux.

$P_D(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}0078}{0{,}015} = 0{,}52.$