BTS BLANC de mathématiques STS2

Exercice 1 :

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2e^{-2t}$, où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0) \quad y' + 2y = 0$$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $y_0(t) = Ce^{-2t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$h(t) = 2te^{-2t}$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

$h(t) = u(t).v(t)$ avec $u(t) = 2t$ et $v(t) = e^{-2t}$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2t}$.
Donc $h'(t) = u'v + uv' = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}$.
D'où $h'(t) + 2h(t) = 2e^{-2t} - 4te^{-2t} + 4te^{-2t} = 2e^{-2t}$.
La fonction h est donc bien solution de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $g(t) = y_0(t) + h(t) = Ce^{-2t} + 2te^{-2t}$ où $C \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

$f(0) = 1$ revient à $Ce^0 + 2\times0\times e^0 = 1$, soit $C = 1$.
La fonction f cherchée est donc $f(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t} = (1 + 2t)e^{-2t}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

$f(t) = (1 + 2t)e^{-2t} = e^{-2t} + 2te^{-2t}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} 2t = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \end{array}\right\} \text{Donc } \lim\limits_{t\to+\infty} 2te^{-2t} = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

On en déduit que $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

(a) Vérifier que pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$: $f'(t) = -4te^{-2t}$.

$f(t) = (1 + 2t)e^{-2t} = u(t).v(t)$ avec $u(t) = 1 + 2t$ et $v(t) = e^{-2t}$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -2e^{-2t}$.

Donc $h'(t) = u'v + uv' = 2e^{-2t} - 4te^{-2t}$.
D'où $h'(t) + 2h(t) = 2e^{-2t} - 2(1 + 2t)e^{-2t} = 2e^{-2t} - 2e^{-2t} - 4te^{-2t} = -4te^{-2t}$.

(b) En déduire le signe de $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

t étant positif, $f'(t) = -4t\mathrm{e}^{-2t}$ est négatif sur $[0\ ;+\infty[$. Comme de plus $f(0) = 1$, on en déduit le tableau de variations suivant :

t	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(t)$	$-$
$f(t)$	$1 \searrow 0$

3. **(a)** Compléter le tableau de valeurs donné en annexe. Arrondir à 10^{-2}.

$\boldsymbol{x}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$\boldsymbol{f(x)}$	1	0,74	0,41	0,2	0,09	0,04

(b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère donné en annexe.

Partie C : Applications de la partie B

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0\ ;+\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par

$$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1 + 2t)\mathrm{e}^{-2t}$$

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la partie B.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.

(a) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?

$g(1) = 1 - f(1) = 1 - (1 + 2)\mathrm{e}^{-2} = 1 - 3\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}59$.

(b) Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?

$g(2) = 1 - f(2) = 1 - (1 + 4)\mathrm{e}^{-4} = 1 - 5\mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}91$.

2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer de réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.

(a) Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leqslant 0{,}25$.

$g(t) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow 1 - f(t) \geqslant 0{,}75 \Leftrightarrow f(t) \leqslant 0{,}25$.

(b) En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée en annexe, déterminer graphiquement, à 10^{-1} près, la durée d'utilisation du réfractomètre (*on laissera les traits de construction apparents*).

D'après le graphique, la durée d'utilisation du réfractomètre est d'environ 1,35 h, soit 1h et 21 minutes.

Exercice 2 **10 points**

Les parties A, B, C et D suivantes peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Défauts de fabrication

Un verre à pied est constitué de deux parties : le calice (ou bol) et le pied. Ces deux parties sont assemblées à chaud et fabriquées par deux procédés différents. Elles peuvent présenter des défauts indépendamment l'une de l'autre.

On a constaté que la machine qui fabrique les calices produit 5 % de calices défectueux et que la machine qui fabrique les pieds produit 2 % de pieds défectueux.

On appelle A l'évènement « le calice est défectueux » et B l'évènement « le pied est défectueux ». On prélève un verre au hasard dans la production.

1. Calculer la probabilité pour que le verre ait les deux défauts.

A et B étant indépendant, on a $P\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P\,(\mathrm{A}) \times P\,(\mathrm{B}) = 0{,}05 \times 0{,}02 = 0{,}001$.

2. Calculer la probabilité pour que le verre soit défectueux c'est-à-dire que le verre ait au moins un des deux défauts.

$P\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P\,(\mathrm{A}) + P\,(\mathrm{B}) - P\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}05 + 0{,}02 - 0{,}001 = 0{,}069$.

Partie B. Vérification d'un lot

Dans un stock important de verres à pied, on en prélève 20 au hasard pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 verres. On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 20 verres associe le nombre de verres défectueux. On suppose que la probabilité qu'un verre soit défectueux est de $p = 0{,}069$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Il s'agit d'une répétition de 20 épreuve de Bernoulli (le tirage d'un verre) de façon identique et indépendante (tirage avec remise). La variable aléatoire X compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli, elle suit donc une loi binomiale. Ses paramètres sont $n = 20$ et $p = 0{,}069$.

2. Calculer à 10^{-2} près la probabilité de l'évènement « dans un tel prélèvement, cinq verres au moins sont défectueux ».

$P\,(X \geqslant 5) = 1 - P\,(X \leqslant 4) \approx 1 - 0{,}9899 \approx 0{,}01$.

Partie C. Diamètre du buvant du verre

Dans cette question on s'intéresse au diamètre, exprimé en millimètre, d'ouverture du verre appelée « buvant » du verre.

On note D la variable aléatoire qui à chaque verre associe le diamètre de son « buvant ». On admet que D suit la loi normale de paramètres $m = 46$ et $\sigma = 0{,}3$.

On prélève au hasard un verre dans la production.

1. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que le diamètre de ce verre soit compris entre 45,8 et 46,3.

$P\,(45{,}8 \leqslant \mathrm{D} \leqslant 46{,}3) \approx 0{,}5888$ soit 0,59 à 10^{-2} près.

2. Déterminer, par la méthode de votre choix, une valeur approchée à 10^{-1} du nombre réel a tel que $P\,(46 - a \leqslant D \leqslant 46 + a) = 0{,}95$.

On sait que si D suit une loi normale de paramètre m et σ, $P\,(m - 2\sigma \leqslant D \leqslant m + 2\sigma) = 0{,}95$. Il nous suffit donc de prendre $a = 2\sigma = 0{,}6$.

Partie D. Brillance des verres

La brillance des verres est contrôlée par un dispositif électronique qui analyse les reflets du verre. La durée de bon fonctionnement de ce dispositif, exprimée en mois, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité que le dispositif ait un temps de bon fonctionnement inférieur ou égal à t mois, est donnée par :

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

1. Montrer que $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$.

2. Sachant que $P(T \leqslant 24) = 0{,}93$, montrer que la valeur arrondie au centième de λ est 0,11.

$P(T \leqslant 24) = 0{,}93 \Leftrightarrow 1 - e^{-24\lambda} = 0{,}93 \Leftrightarrow e^{-24\lambda} = 0{,}07 \Leftrightarrow -24\lambda = \ln 0{,}07 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}07}{24} \approx 0{,}11$.

3. Quelle est l'espérance de la durée de bon fonctionnement de ce dispositif ?
On arrondira à l'unité et on interprétera le résultat.

$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 9$, ce qui signifie que, sur un grand nombre de dispositifs électronique analysant les reflets du verre, la durée de vie moyenne est de 9 mois.

4. La probabilité que la durée de vie soit supérieure à 4 ans est-elle supérieure à 1 % ?
Justifier.

$P(T > 48) = 1 - P(T \leqslant 48) = e^{-48\lambda} = e^{-48\times 0{,}11} \approx 0{,}005 < 0{,}01$. La probabilité que la durée de vie soit supérieure à 4 ans est donc inférieure à 1 %.

On rappelle que e^u est une primitive de $u'e^u$.

Nom : **Prénom :**

ANNEXE (à rendre avec la copie)

a. Tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2}) de la fonction f :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(t)$	1	0,74	0,41	0,2	0,09	0,04

b.