

Exercice 1 : (7 points)

Afin de vérifier la bonne isolation thermique d'un spa, on porte la température de l'eau du spa à 38°C puis on coupe le système de chauffage de l'eau.

On s'intéresse à l'évolution de cette température en fonction du temps écoulé à partir de cette coupure.

La température de l'eau du spa est modélisée par une fonction f qui, à tout temps t (en heures) écoulé depuis la coupure de l'alimentation électrique, associe la température $f(t)$, en degré Celsius (°C), de l'eau du spa au temps t . On admet que $f(0) = 38$.

Lors de cette vérification, la température ambiante extérieure au spa reste constante et égale à 25 °C.

On admet que la fonction f est la solution sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) d'inconnue y de la variable réelle t : $y' + 0,05y = 1,25$ et qui vérifie la condition $f(0) = 38$.

1. Déterminer les solutions $h(t)$ de l'équation différentielle (E₀) : $y' + 0,05y = 0$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Les solutions de (E₀) sont les fonctions $h(t) = ke^{-0,05t}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $g(x) = 25$ est une solution (particulière) de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,05y = 1,25$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

$g'(t) = 0$, donc $g'(t) + 0,05g(t) = 0 + 0,05 \times 25 = 1,25$. Donc g est bien une solution de (E).

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,05y = 1,25$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $f(t) = h(t) + g(t) = ke^{-0,05t} + 25$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Nous savons que $f(0) = 38$, donc $f(0) = ke^0 + 25 = 38$, soit $k + 25 = 38$, donc $k = 13$.

Nous obtenons donc bien $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

5. Quelle est la température de l'eau au bout d'une heure et demi ?

$f(1,5) = 13e^{-0,05 \times 1,5} + 25 \approx 37$.

La température de l'eau au bout d'une heure et demi est donc d'environ 37 °C.

Exercice 2 : (4 points)

Dans une usine, lorsqu'une machine tombe en panne, elle est immobilisée pour le reste de la journée et réparée pour le lendemain. La probabilité qu'elle tombe en panne un jour quelconque est égale à 0,025.

On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 200 jours consécutifs choisie au hasard,

associe le nombre de jours où la machine est tombée en panne. On considère que les jours où les pannes surviennent sont indépendants les uns des autres.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (« piocher » 200 jours et regarder si ce jour-là la machine tombe en panne), elle suit donc une loi binomiale. Ses paramètres sont $n = 200$ et $p = 0,025$.

2. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ .

Soit Y une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

a. Justifier que $\lambda = 5$.

$$\lambda = np = 200 \times 0,025 = 5.$$

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} de la probabilité $P(Y \leq 10)$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Exercice 3 : (6 points)

Dans le cadre d'une étude sur des cellules exposées à un traitement médical, on modélise l'évolution quotidienne de l'état d'une cellule entre trois états :

S : cellule saine

I : cellule infectée

M : cellule en mutation

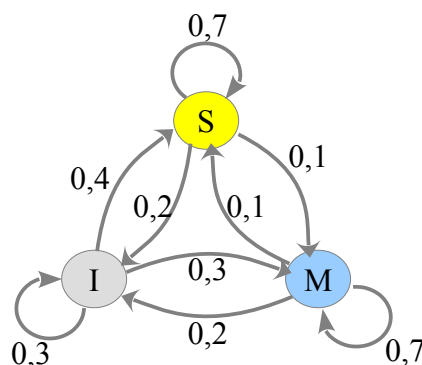
On a établi les probabilités de transition suivantes :

Une cellule saine a 70% de chances de rester saine, 20% de chances de devenir infectée et 10% de chances d'entrer en mutation.

Une cellule infectée a 40% de chances de redevenir saine (grâce au traitement), 30% de chances de rester infectée et 30% de chances d'entrer en mutation.

Une cellule en mutation a 10% de chances de redevenir saine, 20% de chances de devenir infectée et 70% de chances de rester en mutation.

1. Construire le graphe probabiliste en représentant les 3 états et les arcs pondérés.



2. a. Une cellule est saine aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'elle soit encore saine demain et après demain ?

$$P(S ; S ; S) = 0,7 \times 0,7 = 0,49.$$

b. Une cellule est saine aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'elle soit en mutation dans 2 jours ?

$$P(S ; S ; M) + P(S ; I ; M) + P(S ; M ; M) = 0,7 \times 0,1 + 0,2 \times 0,3 + 0,1 \times 0,7 = 0,2.$$

Exercice 4 : (3 points)

Cet exercice se fait à la calculatrice, seul le résultat est attendu, aucune justification n'est demandée. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-3} près.

1. Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 1$.

$$\text{Calculer } P(3,5 \leq X \leq 5) \approx 0,533$$

$$2. \text{ Calculer } \int_5^9 \frac{x+5}{2-x} dx \approx -9,931$$