PRIMITIVES ET INTÉGRALES

I. Primitives :

1°) Tableau des primitives :

En lisant le tableau des dérivées à « l'envers », on obtient le tableau suivant :

La fonction f	Fonctions primitives F (c est une constante réelle)	Définie sur
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n entier relatif non nul différent de -1)	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -2$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$\mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c$	$\mathbb{R}$

2°) Primitives et opérations :

fonction	fonctions primitives	conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + c$	u dérivable sur I ; n un entier relatif **différent de -1** ; pour $n < -1$, u ne s'annule pas sur I.
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	

II. Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive :

Propriété :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ où F est une primitive de f sur I.

Remarque :

F(b) – F(a) s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$, qui se lit « F(x) pris entre a et b ».

On obtient donc $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$ = F(b) – F(a).

Exemples :

- $\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \frac{-2^3}{3}+4\times 2-\left(\frac{-(-2)^3}{3}+4\times(-2)\right)=\frac{32}{3}$.
- $\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x}\,dx=[\ln x]_{\frac{1}{2}}^{4}$ = ln 4 – ln $\frac{1}{2}$ = ln 4 + ln 2 = 3 ln 2.

III. Propriétés de l'intégrale :

1°) Linéarité (rappel) :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I de ℝ et λ un réel, alors :

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2°) Positivité (rappel) :

Propriété :

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I de ℝ.

Si, pour tout $x \in [a ; b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (comme on est sur $[a ; b]$, on a $a < b$).

3°) Relation de Chasles (rappel) :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a ; c]$ et $b \in [a ; c]$, alors $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

Conséquence :

$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$, donc $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

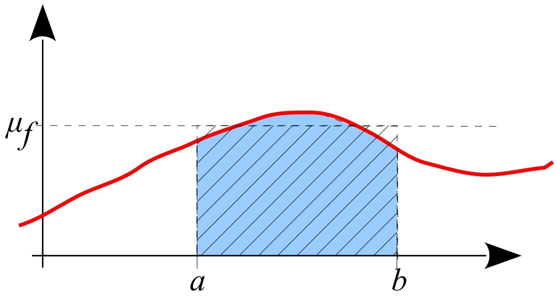
4°) Valeur moyenne d'une fonction :

Définition :

Soit f une fonction continue. Si $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Interprétation graphique :

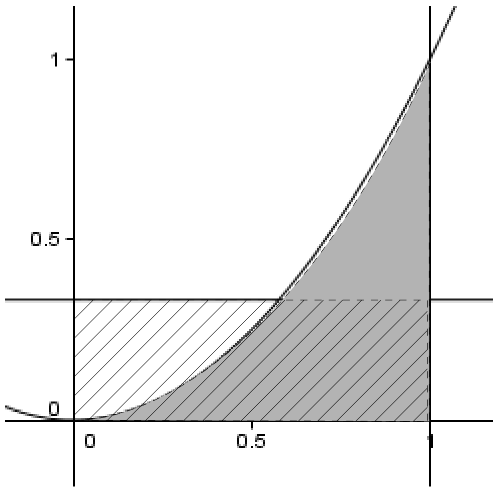


La droite d'équation $y = \mu_f$ est la droite horizontale telle que l'aire des parties du plan délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part et les courbes d'équations $y = f(x)$ ( ) et $y = \mu_f$ ( ) soient de même valeur.

Exemple :

La valeur moyenne sur $[0 ; 1]$ de la fonction carré est :

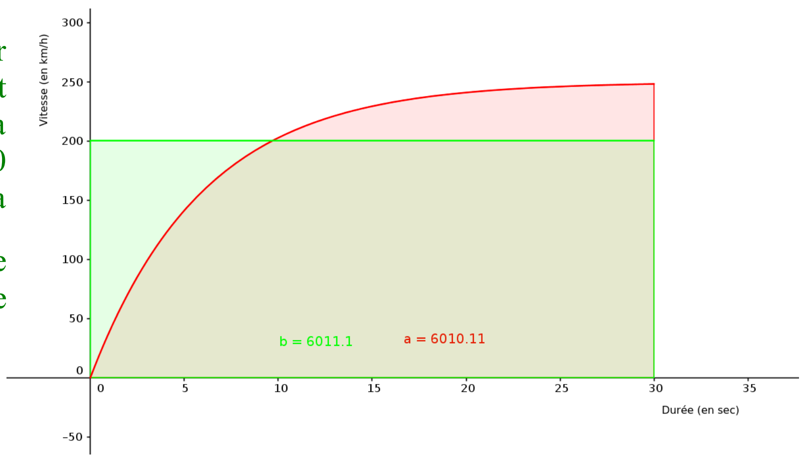
$$\mu = \frac{1}{1} \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Les aires hachurée et grisée sont donc égales.

Exemple :

Pour tester les performances de son dernier véhicule sportif, un constructeur automobile fait des tests sur circuit. Il a en particulier relevé la vitesse du véhicule durant une accélération de 30 secondes. Il a constaté que cette vitesse suivait la fonction $f(x) = 250 - 250\,e^{-\frac{x}{6}}$. Il vous demande de calculer sa vitesse moyenne μ sur ces trente secondes.



Il faut donc calculer $\mu = \frac{1}{30}\int_0^{30} f(x)\,dx$.

Recherche d'une primitive de f : $f(x) = 250 - 250\times(-6)u'e^u$ avec $u(x) = -\frac{x}{6}$ donc $u'(x) = -\frac{1}{6}$.

soit $f(x) = 250 + 1500u'e^u$

Donc $F(x) = 250x + 1500e^u = 250x + 1500\,e^{-\frac{x}{6}}$.

Donc $\mu = \frac{1}{30}\int_0^{30} f(x)\,dx = \frac{1}{30}\left[250x + 1500\,e^{-\frac{x}{6}}\right]_0^{30} = \frac{1}{30}\left(250\times30 + 1500\,e^{-5} - 1500\,e^{0}\right) \approx 200{,}37$.

Vous pouvez donc dire au constructeur que la vitesse moyenne du véhicule a été d'environ 200,37 km.h^{-1}.