EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ

Jusqu'à présent en première année et en ce début de deuxième année, pour définir une loi de probabilité il suffisait d'associer à chaque issue la probabilité qui lui correspondait. Cela était possible car le nombre d'issues était fini. Dans certains cas la variable aléatoire est continue, et donc elle prend une infinité de valeurs (ex : durée de communications téléphoniques). On ne peut alors plus attribuer une probabilité à chaque issue (elle serait nulle), mais on s'intéresse à la probabilité que la variable aléatoire appartienne à un intervalle, (durée de communication entre 1 et 2 min). On dit qu'on définit une loi de probabilité continue.

I. Définition d'une loi à densité :

1°) Fonction densité de probabilité :

Définition :

f est une fonction densité de probabilité sur $[a\,;\,b]$ si elle vérifie trois conditions :

1 : f est continue sur $[a\,;\,b]$;

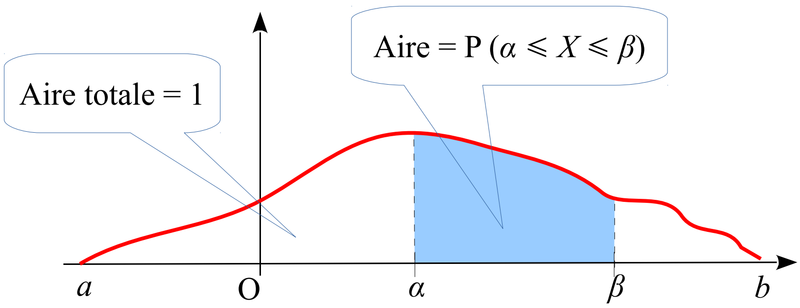
2 : pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geqslant 0$;

3 : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

2°) Loi à densité :

Définition :

Une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;\,b]$ suit une loi à densité f, si pour tous réels α et β de I on a $\mathrm{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X = \alpha) = \int_\alpha^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

Par conséquent $\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = \mathrm{P}(X < \alpha)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant \alpha) = \mathrm{P}(X > \alpha)$;

$\mathrm{P}(X \leqslant \alpha) = 1 - \mathrm{P}(X \geqslant \alpha)$.

3°) Fonction de répartition :

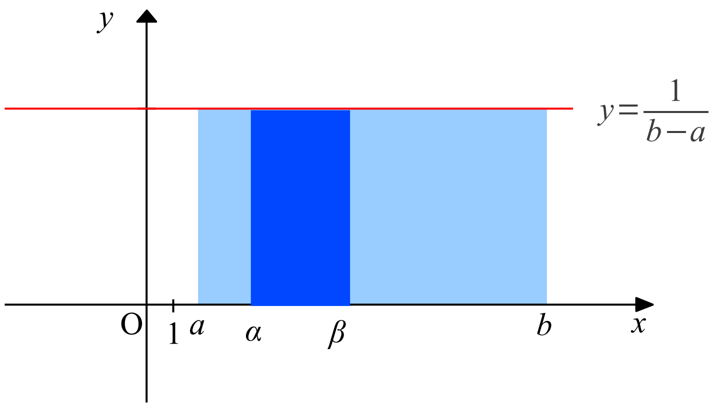
Définition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Loi uniforme :

1°) Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$:



Définition :

On appelle loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ la loi continue ayant pour densité la fonction constante f définie sur $[a\,;\,b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Remarque :

On peut vérifier que $f(x)$ est bien une fonction densité de probabilité.

En effet, $f(x)$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$.

Notation :

$\mathcal{U}(a\,;\,b)$ signifie loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

Propriété :

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ inclus dans $[0\,;\,1]$ e st $P([\alpha\,;\,\beta]) = \frac{1}{b-a}(\beta-\alpha)$.

Preuve :

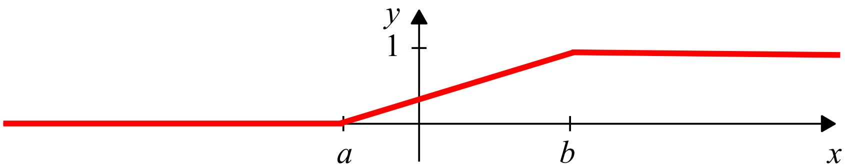
$$P([\alpha\,;\,\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b-a}x\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{b-a}(\beta-\alpha).$$

Exemple :

On choisit au hasard un réel de $[2\,;\,5]$. La probabilité d'obtenir un réel de $[3{,}3\,;\,4{,}5]$ est $P([3{,}1\,;\,4{,}5]) = \frac{1}{5-2}\times(4{,}5-3{,}3)=\frac{1}{3}\times 1{,}2=0{,}4$.

2°) Fonction de répartition :

La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$ est $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a\,;\,b] \\ 1 & \text{si } x>b \end{cases}$.



3°) Espérance et variance :

Propriété :

Si X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(a\,;\,b)$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Preuve :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,dt = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_a^b f(x)(x-E(X))^2\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\frac{(b-a)^3}{8}}{3} + \frac{\frac{(b-a)^3}{8}}{3}\right]$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[2 ; 5]$ ($\mathcal{U}(2 ; 5)$).

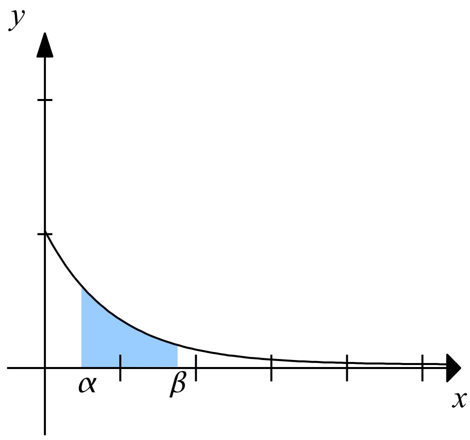
Alors $E(X) = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$ $V(X) = \frac{(5-2)^2}{12} = \frac{3}{4}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

III. Loi exponentielle sur $[0 ; +\infty[$:

1°) Définition :

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue ayant pour densité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel strictement positif.



Propriété :

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha ; \beta]$ inclus dans $[0 ; +\infty[$ est $P([\alpha ; \beta]) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Preuve :

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta = \left[e^{-\lambda x}\right]_\beta^\alpha = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Exemple :

Pour $\lambda = 1{,}5$. On a donc une loi ayant pour densité la fonction $f(x) = 1{,}5e^{-1{,}5x}$.

$$P([0 ; 1]) = \int_0^1 1{,}5e^{-1{,}5x}\,dx = \left[-e^{-1{,}5x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1{,}5} \approx 0{,}78.$$

Remarque :

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement. Explications : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique. La probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant t années après sa mise en service. C'est-à-dire que $P(X > t) = P_{X>s}(X > t + s)$.

Cette loi modélise le phénomène de « mort sans vieillissement », observé par exemple pour la désintégration radioactive.

2°) Espérance, variance et écart type d'une V.A. suivant une loi exponentielle :

Propriété (admise) :

L'espérance d'une V.A. suivant une loi exponentielle sur $[0\,;\,+\infty[$ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, sa variance est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ et son écart type est donc $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

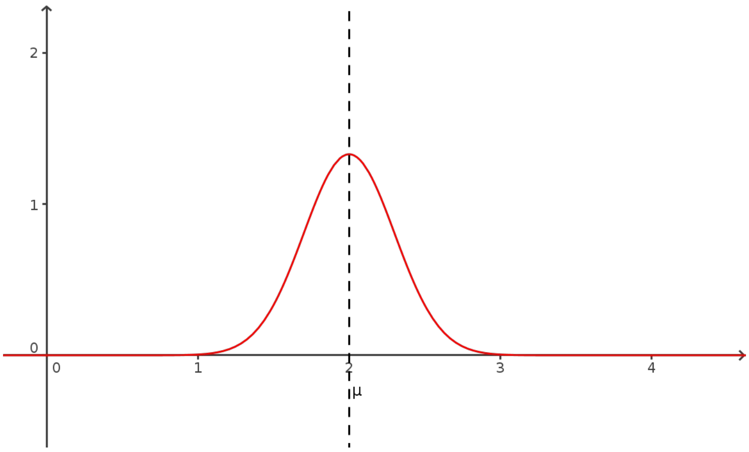
Exemple :

L'espérance d'une V.A. suivant une loi exponentielle de paramètre 2 sur $[0\,;\,+\infty[$ est $E(X) = \frac{1}{2}$ et sa variance est $V(X) = \frac{1}{4}$.

IV. Loi normale :

1°) Définition :

Tout comme les lois uniforme et exponentielle, la loi normale est une loi à densité. La courbe représentative de la fonction densité de la loi normale est en forme de cloche.



Lorsqu'une variable aléatoire suit une loi normale de paramètres μ et σ, beaucoup de valeurs prises par la V.A. se situent autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique.

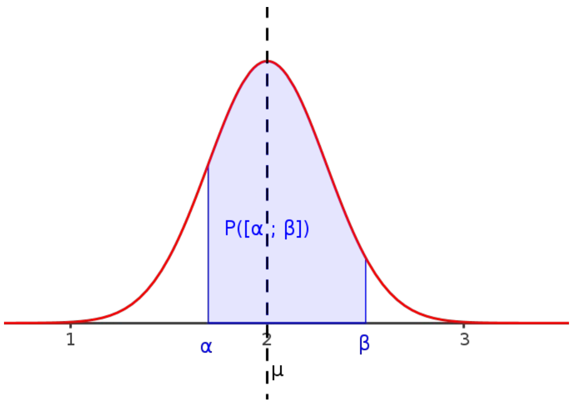
Notation :

Une loi normale de paramètres μ et σ est notée $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.

2°) Calculs de probabilité :

Définition :

Tout comme pour les autres lois continues, la probabilité que la variable aléatoire soit comprise entre deux valeurs α et β est égale à l'aire sous la courbe entre les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$, c'est-à-dire, $P(\alpha < X < \beta) = P([\alpha\,;\,\beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ où f est la fonction densité (dont la représentation graphique est en forme de cloche).

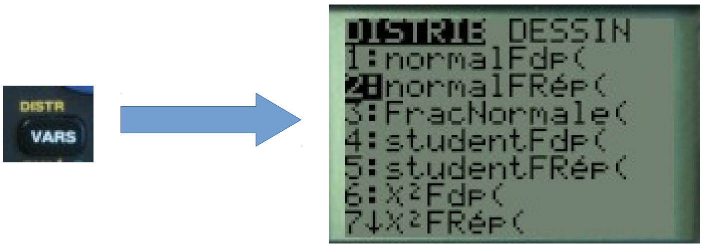


Le problème est que la fonction densité de $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ est assez compliquée (en fait, c'est $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$) et qu'on ne sait pas en trouver une primitive.

Conséquence :

Pour calculer des probabilités, nous utiliserons donc la calculatrice.

Pour la TI 82, il faut aller dans le menu « distrib » (2nde var) puis prendre la deuxième fonction : « 2 : normalFRép(» pour les versions en français, ou « 2 : normalcdf(»



Cette fonction nécessite 4 arguments : si l'on veut calculer P($[\alpha\ ;\ \beta]$) pour une variable aléatoire suivante la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ il faut saisir : normalFRép(α,β,μ,σ).

Exemple :

Une expérience aléatoire consiste à choisir un individu au hasard dans la population et à regarder son Quotient Intellectuel. Les tests de QI sont étalonnés pour suivre une loi normale $\mathcal{N}(100\ ;\ 15^2) = \mathcal{N}\ (100\ ;\ 225)$. Dans ces conditions, la probabilité que l'individu ait un QI compris entre 80 et 120 est de P ([80 ; 120]) ≈ 81,8 %. On a tapé à la calculatrice normalFRép(80,120,100,15).

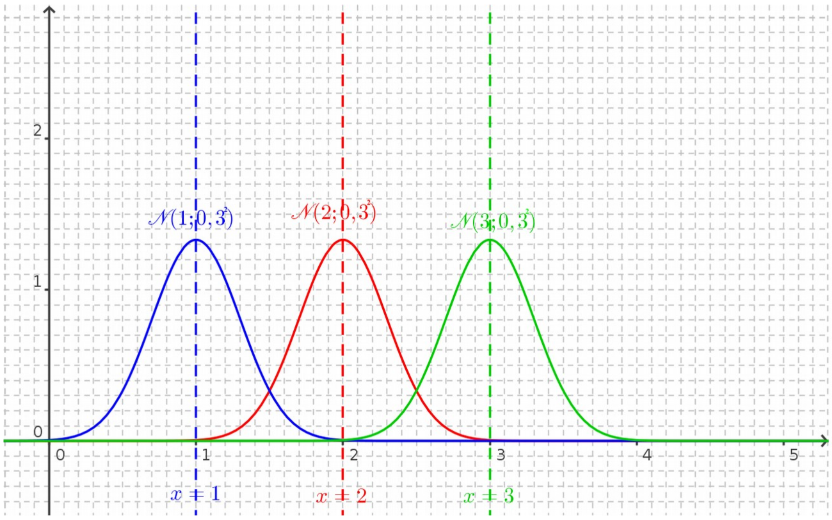
Si l'on veut connaître la probabilité que le QI soit supérieur à 130, on tape normalFRép(130,1E99,100,15). On demande en fait la probabilité que le QI soit compris entre 130 et 10^{99}. On trouve P (X>130) ≈ 2,28 %.

Si l'on veut connaître la probabilité que le QI soit inférieur à 90, on tape normalFRép(-1E99,90,100,15). On demande en fait la probabilité que le QI soit compris entre -10^{99} et 90. On trouve P (X<90) ≈ 25,25 %.

3°) Espérance et écart type :

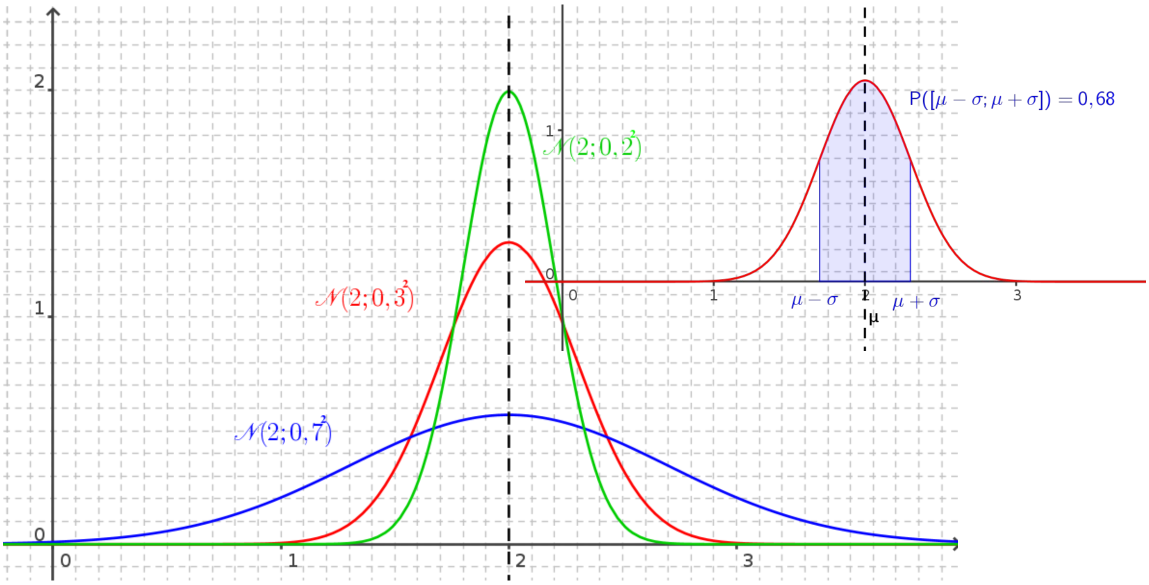
Propriété :

La droite d'équation $x = \mu$ est l'axe de symétrie de la courbe. En faisant varier μ, on fait donc se déplacer la courbe vers la droite ou vers la gauche :



Propriété :

Nous savons que plus l'écart type σ est petit, plus les valeurs de la variable aléatoire sont regroupées autour de l'espérance μ, et plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées. μ a donc une influence sur l'évasement de la courbe.

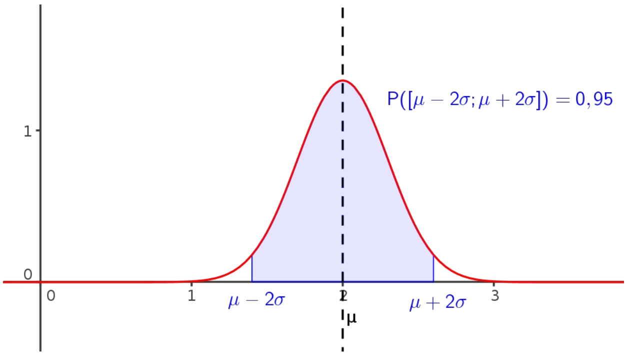


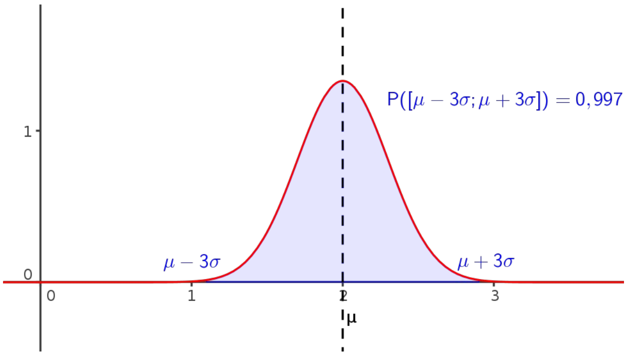
4°) Quelques valeurs à retenir :

Propriété :

Quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ, on a toujours :

- $P([\mu-\sigma\ ;\ \mu+\sigma]) = 0{,}68$;
- $P([\mu-2\sigma\ ;\ \mu+2\sigma]) = 0{,}95$;
- $P([\mu-3\sigma\ ;\ \mu+3\sigma]) = 0{,}997$.





Remarque :

Cela illustre très bien ce que nous disions dans la définition, à savoir que beaucoup de valeurs prises par la V.A. se situent autour de la moyenne, de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne.

Exemple :

Reprenons l'exemple du quotient intellectuel. On rappelle qu'il suit $\mathcal{N}(100\ ;\ 15)$. D'après la propriété précédente, 68 % de la population a un Q.I. dans $[85\ ;\ 115]$, 95 % de la population a un Q.I. dans $[70\ ;\ 130]$ et 99,7 % de la population a un Q.I. dans $[55\ ;\ 145]$.

5°) Loi normale centrée réduite :

Définition :

La loi normale centrée réduite est la loi normale qui a pour espérance $\mu = 0$ et pour écart type $\sigma = 1$ (donc pour variance 1 aussi. Elle est donc notée $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

Propriété :

Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

Remarque :

Dans un exercice, lorsque dans une loi normale il nous manque μ et/ou σ, on se ramène à $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

Utilisation de la calculatrice :

Sur la TI, lorsque l'on veut calculer u tel que $P(X \leqslant u) = a$, X étant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}$ (0 ; 1), on tape FracNormale(a,0,1), la fonction FracNormale se trouvant dans le menu distrib (2nde var).

Si l'on veut calculer u tel que $P(X \leqslant u) = a$, X étant une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, on tape FracNormale($a$,$\mu$,$\sigma$).