# *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

## *I. Introduction :*

### 1°) définition :

**Définition :**

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s). Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

### 2°) Équations différentielles du premier ordre :

**Définition :**

On appelle équation différentielle du premier ordre une équation différentielle ne faisant intervenir que la fonction est sa dérivée.

**Remarque :**

Seules les équations différentielles du premier ordre sont au programme.

## *II. Équations différentielles du type $y' + ay = 0$ :*

### 1°) Solution générale :

**Théorème :**

Soit $y' + ay = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{-ax} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

**Remarque :**

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de $k$ correspond une fonction solution.

**Démonstration :**

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

● Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = -ka\mathrm{e}^{-ax}$.

$$f'(x) + a\,f(x) = -ka\mathrm{e}^{-ax} + a \times k\mathrm{e}^{-ax} = 0 \text{ donc, } f \text{ est bien solution de (E).}$$

Les fonctions de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-ax}$ sont donc des solutions de (E).

● Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, on suppose que $g$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de (E) et on va montrer qu'alors elle est de la forme $x \longmapsto k\mathrm{e}^{-ax}$.

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{ax}$. $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{ax} + ag(x)\mathrm{e}^{ax} \Leftrightarrow h'(x) = \mathrm{e}^{ax}(g'(x) + ag(x))$.

Mais comme $g$ est solution de (E), on a $g'(x) + ag(x) = 0$ soit $h'(x) = 0$, ce qui signifie que $h$ est une constante.

$$\text{On a alors : } h(x) = k \Leftrightarrow g(x)\mathrm{e}^{ax} = k \Leftrightarrow g(x) = k\mathrm{e}^{-ax}.$$

**Exemple :**

Résolution de l'équation différentielle : $y' + 4y = 0$ :

➔ Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{-4x}$ où $k$ est une constante réelle. Par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-4x}$ ou $f(x) = 2\mathrm{e}^{-4x}$ ou encore $f(x) = -\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-4x}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

Résolution de l'équation différentielle : $y' = 3y$ :

➔ Cette équation peut s'écrire $y' - 3y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$ ($k$ constante réelle).

**Remarque :**

Les équations différentielles de la forme $\alpha y' + \beta y = 0$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres réels se ramène à celles du type $y' + ay = 0$ avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

**Exemple :**

Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 0$ :

➔ Cette équation peut s'écrire $y' + \dfrac{5}{2}y = 0$. Les solutions sont du type $f(x) = k\,e^{-\frac{5}{2}x}$ où $k$ est une constante réelle.

### 2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

**Théorème :**

Soient $x_0$, $y_0$ et $a$ des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = 0$ admet une unique solution $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Cette solution est la fonction définie par $f(x) = y_0\,e^{-a(x - x_0)}$.

**Démonstration :**

On sait que la solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ est une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ où $k$ est un nombre réel.

De plus, $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{-ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0\,e^{-ax_0}$.

D'où $f(x) = y_0\,e^{-ax_0}e^{ax} = y_0\,e^{a(x - x_0)}$.

**Remarque :**

Concrètement, il est inutile d'apprendre par cœur la forme de la solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ avec une condition initiale ($f(x) = y_0\,e^{-a(x - x_0)}$). On dira que cette solution est une solution particulière et on refera à chaque fois la démarche pour trouver la valeur de $k$ qui convient.

**Exemple 1 :**

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution $f$ vérifie $f(0) = 1$ :

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où $k$ est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de $k$ convient pour que $f(0) = 1$ :

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 1 \Leftrightarrow k = 1$,

D'où $f(x) = e^{-2x}$.

**Exemple 2 :**

Résolution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ dont la solution $f$ vérifie $f(2) = 4$ :

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = ke^{-2x}$ où $k$ est une constante réelle.

➔ Solution particulière : on a $f(2) = 4 \Leftrightarrow ke^{-2\times 2} = 4 \Leftrightarrow k = 4e^{4}$,

D'où $f(x) = 4e^{4}e^{-2x}$ que l'on peut aussi écrire $f(x) = 4e^{-2x+4}$ ou encore $f(x) = 4e^{-2(x-2)}$ (on retrouve là la forme donnée dans le théorème).

## *III. Équations différentielles du type $y' + ay = b$ :*

### 1°) Solution générale :

**Théorème** (admis) **:**

Soit $y' + ay = b$ une équation différentielle du premier ordre ou $a$ et $b$ sont des réels avec $a \neq 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions dérivables, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

**Remarque :**

Il y a donc une infinité de fonctions solutions d'une telle équation : à chaque valeur de $k$ correspond une fonction.

**Exemple** :

Résolution de l'équation différentielle : $y' + 4y = 3$ :

➔ Les solutions sont du type $f(x) = ke^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ où $k$ est une constante réelle.

Par exemple, $f(x) = e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ ou $f(x) = 2e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ ou encore $f(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-4x} + \dfrac{3}{4}$ sont des solutions de cette équation différentielle.

Vérifions : $f(x) = ke^{-4x} + \dfrac{3}{4}$, donc $f'(x) = -4ke^{-4x}$.

On a donc $f'(x) + 4f(x) = -4ke^{-4x} + 4\left(k\,e^{-4x} + \dfrac{3}{4}\right) = -4ke^{-4x} + 4ke^{-4x} + 3 = 3$.

**Remarque :**

Les équations différentielles de la forme $\alpha y' + \beta y = \gamma$ où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des nombres réels se ramène à celles du type $y' + ay = b$ avec $a = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

**Exemple :**

Résolution de l'équation différentielle : $2y' + 5y = 4$ revient à $y' + 2{,}5y = 2$.

### 2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

**Théorème** (admis) **:**

Soient $x_0$, $y_0$, $a$ et $b$ des réels donnés, l'équation différentielle $y' + ay = b$ admet une unique solution $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

**Exemple :**

Résolution de l'équation différentielle $y' = -5y + 2$ telle que $f(0) = 1$ :

Remarquons tout d'abord que cette équation s'écrit aussi $y' + 5y = 2$

➔ Solution générale : les solutions sont du type $f(x) = k\,e^{-5x} + \dfrac{2}{5}$ où $k$ est une constante réelle.

Il reste a déterminer quelle valeur de $k$ convient pour que $f(0) = 1$ :

➔ Solution particulière : on a $f(0) = 1 \Leftrightarrow k\,e^{-5\times 0} + \dfrac{2}{5} = 1 \Leftrightarrow k + \dfrac{2}{5} = 1$ soit $k = \dfrac{3}{5}$.

D'où $f(x) = \dfrac{3}{5}e^{-5x} + \dfrac{2}{5}$.

## *IV. Équations différentielles du type ay' + by = c (t) :*

### 1°) Solution générale :

**Théorème** (admis) **:**

Soient $a$ et $b$ des réels donnés et $c(x)$ une fonction.

Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = c(x)$ s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de $ay' + by = c(x)$ et la solution générale de l'équation sans second membre associée à $ay' + by = 0$.

**Remarque :**

La méthode pour résoudre ces équations différentielles est induite par ce théorème :

1- On commence par trouver une solution de $ay' + by = c(x)$. L'énoncé vous guidera soit en vous donnant une solution qu'il vous suffira de vérifier, soit en vous donnant des indications qu'il faudra suivre.

2- Ensuite on résout $ay' + by = 0$ (voir ***II.***)

3- Enfin, on ajoute les deux fonctions trouvées.

**Exemple** :

*Problème :*

Résolution de l'équation différentielle : $y' + y = 2x + 3$ (E) :

1°) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$ est une solution de (E).

2°) Résoudre $y' + y = 0$.

3°) En déduire l'ensemble des solution de (E).

*Solution :*

1°) $g(x) = 2x + 1$, donc $g'(x) = 2$, donc $g'(x) + g(x) = 2x + 1 + 2 = 2x + 3$. Donc $g$ est bien solution de (E).

2°) $y' + y = 0$ est une équation de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 1$, ses solutions sont donc les fonctions de la forme $y_0(x) = ke^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3°) L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$y(x) = ke^{-x} + 2x + 3$.

### 2°) Unicité de la solution sous condition initiale :

**Théorème** (admis) **:**

Soient $x_0$, $y_0$, $a$ et $b$ des réels donnés et $c(x)$ une fonction. L'équation différentielle $ay' + by = c(x)$ admet une unique solution $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.

**Exemple :**

Déterminer la solution $f$ l'équation différentielle : $y' + y = 2x + 3$ (E) telle que $f(1) = 6$.

D'après le 1°), $f$ est de la forme $f(x) = ke^{-x} + 2x + 3$. $f(1) = 6$ s'écrit alors $ke^{-1} + 2\times1 + 3 = 6$ soit $ke^{-1} = 1$. Autrement dit $k = e$.

$f(x) = e\times e^{-x} + 2x + 3 = e^{-x+1} + 2x + 3$.

## *V. Différentes notations :*

En physique, la position ou l'évolution d'un système dépend du temps, la variable est donc $t$. On cherche alors une fonction $f : t \longmapsto f(t)$. On l'écrit souvent $t \longmapsto x(t)$ ou $t \longmapsto y(t)$, et la dérivée par rapport au temps s'écrit $x'(t) = \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}x(t)$.

L'équation différentielle $y' + y = 2x + 3$ par exemple, peut s'écrire alors

$x'(t) + x(t) = 2t + 3$ ou $\dot{x}(t) + x(t) = 2t + 3$ ou $\dfrac{dx}{dt} + x = 2t + 3$ ou $\dfrac{d}{dt}x(t) + x(t) = 2t + 3$

Mais dans tous les cas, il s'agit de la même équation.