

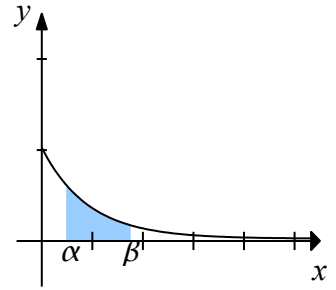
PROBABILITÉ 2

I. Loi exponentielle sur $[0 ; +\infty[$:

1°) Définition :

On appelle loi exponentielle de paramètre λ la loi continue ayant pour densité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ où } \lambda \text{ est un réel strictement positif.}$$



Propriété :

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle $[\alpha ; \beta]$ inclus dans $[0 ; +\infty[$ est $P([\alpha ; \beta]) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Preuve :

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{\alpha}^{\beta} = [e^{-\lambda x}]_{\beta}^{\alpha} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Exemple :

Pour $\lambda = 1,5$. On a donc une loi ayant pour densité la fonction $f(x) = 1,5e^{-1,5x}$.

$$P([0 ; 1]) = \int_0^1 1,5 e^{-1,5x} dx = [-e^{-1,5x}]_0^1 = 1 - e^{-1,5} \approx 0,78.$$

Remarque :

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement. Explications : si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique. La probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant t années après sa mise en service. C'est-à-dire que $P(X > t) = P_{X>s}(X > t + s)$.

Cette loi modélise le phénomène de « mort sans vieillissement », observé par exemple pour la désintégration radioactive.

2°) Espérance, variance et écart type d'une V.A. suivant une loi exponentielle :

Propriété (admise) :

L'espérance d'une V.A. suivant une loi exponentielle sur $[0 ; +\infty[$ est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, sa variance est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ et son écart type est donc $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Exemple :

L'espérance d'une V.A. suivant une loi exponentielle de paramètre 2 sur $[0 ; +\infty[$ est $E(X) = \frac{1}{2}$ et sa variance est $V(X) = \frac{1}{4}$.

II. Approximation de la loi binomiale par une loi normale :

1°) Rappel :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues : un succès avec une probabilité de p et un échec avec une probabilité de $1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli de paramètre n et p , la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de façon indépendante n fois. p correspond à la probabilité du succès dans l'épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire X correspondant au nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit une loi binomiale de paramètre n et p , notée $\mathcal{B}(n ; p)$.

L'espérance d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n ; p)$ est $E(X) = np$.

L'écart type d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n ; p)$ est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

2°) Propriété :

Propriété :

Lorsque les produits np et $n(1-p)$ sont suffisamment grands, on approchera la loi $\mathcal{B}(n ; p)$ par la loi normale de même espérance et de même écart-type, soit $\mathcal{N}(np ; \sqrt{np(1-p)})$.

Remarque :

En fait, plus n est grand et plus p est proche de 0,5, plus cette approximation est précise. Concrètement, on ne vous demandera pas de justifier que l'on peut faire cette approximation, on vous dira dans chaque exercice que l'on peut. Habituellement, on estime que cette approximation est valable lorsque $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ et que $n \geq 30$.

Exemple :

On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans quelle est la probabilité pour que moins de 24,5 germent ? Notons p la probabilité qu'une graine germe ($p = 0,3$) et considérons que l'échantillon est indépendant. Notons X la v.a. « nombre de graines qui germent parmi les 100 ».

X suit la loi $\mathcal{B}(100 ; 0,3)$ et on cherche : $P(X < 24,5)$ qui peut s'écrire aussi $P(X \leq 24)$.

Rappel :

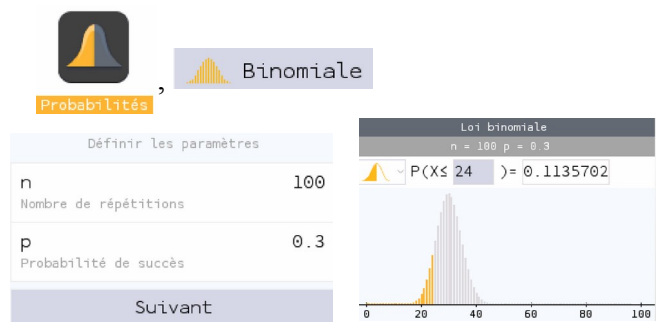
Sur la TI 83,

 , on choisit **2:binomFRép(**

et on complète

```
binomFRép
nbreEssais:100
p:0.3
valeur de x:24
Coller
```

Sur la Numworks,



On trouve $P(X \leq 24) \approx 0,1136$.

On peut aussi calculer une valeur approchée en remplaçant cette loi binomiale par une loi normale.

Pour cela il faut commencer par calculer l'espérance et l'écart type de X :

$$E(X) = \mu = np = 30 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,3 \times 0,7} \approx 4,5826.$$

Nous allons approcher la variable aléatoire discrète X qui suit $\mathcal{B}(100 ; 0,3)$ par la variable aléatoire continue Y qui suit $\mathcal{N}(30 ; 4,5826)$.

Rappel :

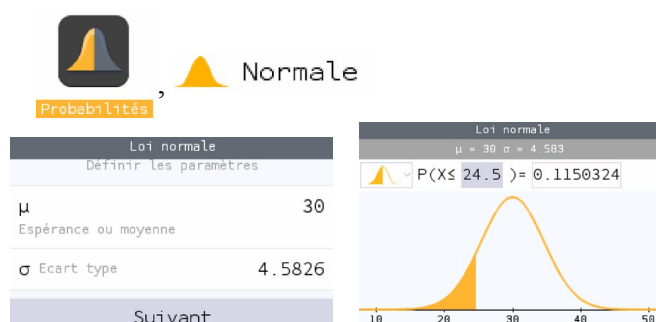
Sur la TI 83,

 , on choisit **2:normalFRép(**

et on complète

```
normalFRép
bornin:-1E99
bornsup:24.5
μ:30
σ:4.5826
Coller
```

Sur la Numworks,



Nous avons alors $P(Y < 24,5) \approx 0,115$.

III. Loi de poisson :

1°) Définition :

Définition :

La loi de Poisson est utilisée lorsqu'on s'intéresse au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle.

Exemple :

Si un certain type d'événements se produit en moyenne 4 fois par minute, pour étudier le nombre d'événements se produisant dans un laps de temps de 10 minutes, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10 \times 4 = 40$. En pratique, on utilise la calculatrice : dans le cas d'une loi de poisson de paramètre λ ,

Sur la TI : choisir $\text{poissonFdp}(\lambda, k)$ pour le calcul de $P(X = k)$ ou $\text{poissonFRép}(\lambda, k)$ pour le calcul de $P(X \leq k)$.

Sur la numworks : un fois qu'on a choisi « loi de poisson » et qu'on a saisi le bon paramètre, on choisit :

-  si on veut $P(X \leq k)$
-  si on veut $P(l \leq X \leq k)$
-  si on veut $P(X \geq k)$
-  si on veut $P(X = k)$

2°) Espérance, variance et écart type :

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , alors :

$$E(X) = \lambda ; V(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

IV. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson :

Propriété :

Soit une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n ; p)$ pouvant être approchée par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson. Alors le paramètre λ de X est $\lambda = np$.

Remarque :

Concrètement, on ne vous demandera pas de justifier que l'on peut faire cette approximation, on vous dira dans chaque exercice que l'on peut. Habituellement, on estime que cette approximation est valable lorsque $p < 0,1$ et $n > 50$.

Exemple :

Une usine fabrique des paquets de pâtes. 0,5 % de ces paquets sont mal fermés et donc invendables. Une grande surface se fait livrer 500 paquets. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de paquets défectueux dans le lot livré.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,005$. $P(X \leq 5) \approx 0,9584$.

Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2,5$. Dans ces conditions, on trouve $P(X \leq 5) \approx 0,9580$.

V. Exemples de processus aléatoires :

1°) Définition

Définition :

Un processus aléatoire est une expérience aléatoire à N états possibles que l'on répète dans le temps par étapes successives. On note E l'ensemble des états possibles.

Exemple :

On observe la météo chaque jour. Elle peut être dans 3 états : Ensoleillé (E), Nuageux (N), Pluvieux (P). On a donc $E = \{E ; N ; P\}$ l'ensemble des états possibles.

Définition :

Si l'état futur ne dépend que de l'état présent, pas du passé ni du temps, le processus aléatoire s'appelle une chaîne de Markov. Il faut donc que les probabilités de passer d'un état à un autre ne dépendent pas du temps.

Exemple :

Si la météo du lendemain ne dépend que de la météo du jour et si toutes les probabilités conditionnelles $P_E(E)$, $P_E(N)$, $P_E(P)$, $P_N(E)$, $P_N(N)$, $P_N(P)$, $P_P(E)$, $P_P(N)$, $P_P(P)$ ne dépendent pas du temps, l'exemple ci-dessus est une chaîne de Markov. On peut noter (N ; E ; P ; E ; E ; E) un parcours possible sur 6 jours.

2°) Graphes probabilistes :

Définition :

On considère une chaîne de Markov à N états possibles.

Un graphe probabiliste est un schéma composé de :

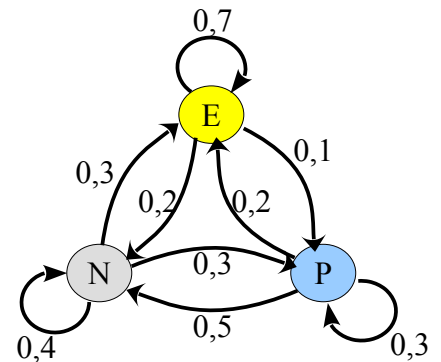
- Sommets (ou nœuds) qui représentent des états possibles
- Flèches (ou arcs) qui représentent les transitions d'un état vers un autre
- Probabilités associées à chaque flèche, qui indiquent la probabilité de passer d'un état à l'autre.

Exemple :

On observe la météo chaque jour. Elle peut être dans 3 états : Ensoleillé (E), Nuageux (N), Pluvieux (P).

- Quand un jour est ensoleillé (E), la probabilité que le lendemain
 - reste Ensoleillé est de 0,7
 - soit Nuageux est de 0,2
 - soit Pluvieux est de 0,1
- Quand un jour est Nuageux (N), la probabilité que le lendemain
 - soit Ensoleillé est de 0,3
 - reste Nuageux est de 0,4
 - soit Pluvieux est de 0,3
- Quand un jour est Pluvieux (P), la probabilité que le lendemain
 - soit Ensoleillé est de 0,2
 - soit Nuageux est de 0,5
 - reste Pluvieux est de 0,3

Graphe probabiliste correspondant à cette situation :



Remarque :

La somme des probabilités de toutes les flèches qui **partent** d'un même sommet doit toujours être égale à 1 (ou 100%).

Exemple :

Dans l'exemple ci-dessus, la somme des probabilités partant de P est : $0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$.

Exemple :

On peut alors calculer la probabilité qu'il fasse beau deux jours de suite à partir de demain sachant qu'il pleut aujourd'hui. On doit calculer la probabilité de la chaîne (P ; E ; E) :

$$P(P ; E ; E) = P_P(E) \times P_E(E) = 0,2 \times 0,7 = 0,14 = 14 \, \%.$$