LOI DE POISSON,
APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE

I. Approximation de la loi binomiale par une loi normale :

1°) Rappel :

Rappel :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que 2 issues : un succès avec une probabilité de p et un échec avec une probabilité de $1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli de paramètre n et p, la répétition d'une même épreuve de Bernoulli de façon indépendante n fois. p correspond à la probabilité du succès dans l'épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire X correspondant au nombre de succès obtenus lors d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p suit une loi binomiale de paramètre n et p, notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

L'espérance d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ est $\text{E}(X) = np$.

L'écart type d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

2°) Propriété :

Propriété :

Lorsque les produits np et $n(1 - p)$ sont suffisamment grands, on approchera la loi $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ par la loi normale de même espérance et de même écart-type, soit $\mathcal{N}(np\ ;\ \sqrt{np(1-p)})$.

Remarque :

En fait, plus n est grand et plus p est proche de 0,5, plus cette approximation est précise. Concrètement, on ne vous demandera pas de justifier que l'on peut faire cette approximation, on vous dira dans chaque exercice que l'on peut. Habituellement, on estime que cette approximation est valable lorsque $np \leqslant 5$, $n(1 - p) \geqslant 5$ et que $n \geqslant 30$.

Exemple :

On estime que la probabilité pour qu'une graine ait perdu son pouvoir germinatif après 3 ans de conservation est de 70%. Sur un échantillon de 100 graines conservées depuis 3 ans quelle est la probabilité pour que moins de 24,5 germent ? Notons p la probabilité qu'une graine germe (p = 0,3) et considérons que l'échantillon est indépendant. Notons X la v.a. « nombre de graines qui germent parmi les 100 ».

X suit la loi $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}3)$ et on cherche : $P(X < 24{,}5)$ qui peut s'écrire aussi $P(X \leqslant 24)$.

À l'aide de la calculatrice TI 82, il faut saisir binomFRèp(100,0.3,24) (ou binompdf(100,0.3,24) si elle est en anglais). On trouve $P(X \leqslant 24) \approx 0{,}1136$.

On peut aussi calculer une valeur approchée en remplaçant cette loi binomiale par une loi normale.

Pour cela il faut commencer par calculer l'espérance et l'écart type de X :

$\text{E}(X) = \mu = np = 30$ et

$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}3 \times 0{,}7} \approx 4{,}5826$.

Nous allons approcher la variable aléatoire discrète X qui suit $\mathscr{B}(100\ ;\ 0{,}3)$ par la variable aléatoire continue Y qui suit $\mathcal{N}(30\ ;\ 4{,}5826)$.

Nous avons alors $P(Y < 24{,}5) \approx 0{,}115$ (on a tapé normalFRép(-1E99,24.5,30,4.5826) à la calculatrice).

II. Loi de poisson :

1°) Définition :

Définition :

La loi de Poisson est utilisée lorsqu'on s'intéresse au nombre de réalisations observées, durant un intervalle de temps de longueur donnée, lorsque le temps d'attente entre deux réalisations est fourni par une loi exponentielle.

Exemple :

Si un certain type d'événements se produit en moyenne 4 fois par minute, pour étudier le nombre d'événements se produisant dans un laps de temps de 10 minutes, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10 \times 4 = 40$. En pratique, on utilise la calculatrice : dans le cas d'une loi de poisson de paramètre λ, choisir poissonFdp(λ,k) pour le calcul de P ($X = k$) ou poissonFRép(λ, k) pour le calcul de P ($X \leqslant k$).

2°) Espérance, variance et écart type :

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$E(X) = \lambda \text{ ; } V(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

III. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson :

Propriété :

Soit une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$ pouvant être approchée par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson.

Alors le paramètre λ de X est $\lambda = np$.

Remarque :

Concrètement, on ne vous demandera pas de justifier que l'on peut faire cette approximation, on vous dira dans chaque exercice que l'on peut. Habituellement, on estime que cette approximation est valable lorsque $p < 0{,}1$ et $n > 50$.

Exemple :

Une usine fabrique des paquets de pâtes. 0,5 % de ces paquets sont mal fermés et donc invendables. Une grande surface se fait livrer 500 paquets. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de paquets défectueux dans le lot livré.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}005$. P ($X \leqslant 5$) $\approx 0{,}9584$.

Nous pouvons approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2{,}5$. Dans ces conditions, on trouve P ($X \leqslant 5$) $\approx 0{,}9580$.