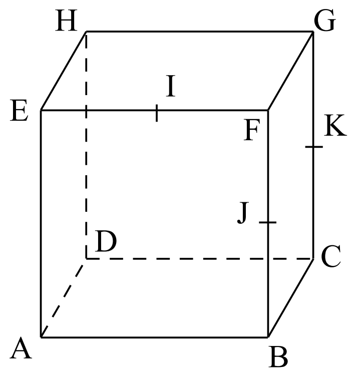
Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **Spé math TG 2**
Prénom : **Sujet A**
1 heure 15 *sur 21 points*



Exercice 1 : *6 points*
On considère un cube ABCDEFGH de côté 2.

Les points I, J et K sont respectivement les milieux de [EF] et [BF] et [GC]

(voir figure ci-contre).

Toutes les questions (par numéro) sont indépendantes.

PARTIE A : *Répondre sur l'énoncé*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies (V) ou fausses (F) ?

Aucune justification n'est attendue, cocher la bonne réponse.

1. Les droites (AJ) et (HF) sont sécantes. □ V ☑ F

2. Les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles. □ V ☑ F

3. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{FH}$ forment une base du plan (ABC). ☑ V □ F

4. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ forment une base de l'espace. ☑ V □ F

5. Dans le repère $(H;\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HD},\overrightarrow{HG})$, B a pour coordonnées (1 ; –1 ; 1). □ V ☑ F

PARTIE B :

1. a. Montrer que AC = AH = HC = $2\sqrt{2}$.

Dans ABC, rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4 + 4 = 8$
Donc AC = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
[AH], [AC] et [HC] sont toutes des diagonales d'une face du cube, on a donc AC = AH = HC = $2\sqrt{2}$.

b. En déduire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}(AC^2 + AH^2 - HC^2) = \frac{1}{2}(8 + 8 - 8) = 4.$$

2. En utilisant la méthode de votre choix, calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI}$$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = AB\times\frac{1}{2}AB = 2$ (en utilisant le projeté de $\overrightarrow{AI}$ sur $\overrightarrow{AB}$)

(BC) ⊥ (ABF), donc $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal à tout vecteur de ABF, en particulier à $\overrightarrow{AI}$, donc $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI} = 0$.
Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AI} = 2$.

Exercice 2 *7 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soient les points A (0 ; –1 ; 0), B (1 ; –3 ; 0), C (–2 ; 1 ; 2), D (–2 ; –3 ; –6) et H (2 ; –1 ; –4).

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan. On appelle $\mathscr{P}$ ce plan.

Trois points non alignés définissent un plan. Ici $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\-3+1\\0-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-0\\1+1\\2-0\end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés : A, B et C définissent bien un plan.

2. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 2 - 2 + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} . \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$, donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

3. Prouver que le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.

$H \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, autrement dit s'il existe $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \alpha\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\,\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2=\alpha-2\beta & L_1\\0=-2\alpha+2\beta & L_2\\-4=2\beta & L_3\end{cases}.$$

L_3 donc tout de suite $\beta = -2$, que l'on remplace donc dans L_2 : $\Leftrightarrow \begin{cases}2=\alpha-2\beta & L_1\\2\alpha=-4 & L_2\\\beta=-2 & L_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=\alpha-2\beta & L_1\\\alpha=-2 & L_2\\\beta=-2 & L_3\end{cases}.$

Ces solutions vérifient aussi L_1 : $-2 + 2\times2 = 2$, les trois vecteurs sont donc coplanaires et $H \in \mathscr{P}$.

4. a. Prouver que H est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathscr{P}$.

$H \in \mathscr{P}$. De plus, $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}-2-2\\-3+1\\-6+4\end{pmatrix} = \overrightarrow{HD}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\vec{n}$, donc $\overrightarrow{HD}$ est colinéaire à $\vec{n}$ ce qui signifie que (HD) est orthogonale à $\mathscr{P}$. CQFD

b. En déduire la distance du point D au plan $\mathscr{P}$.

La distance de D à $\mathscr{P}$ est HD = $\|\overrightarrow{HD}\| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

5. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} . \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = -2 - 4 + 0 = -6$

b. En déduire une mesure au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

$AB = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$; $AC = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

De plus $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, soit $-6 = \sqrt{5}\times2\sqrt{3}\ \cos(\widehat{BAC})$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{15}} = \frac{-\sqrt{15}}{5}\text{, donc } \widehat{BAC} \approx 141°.$$

Exercice 3 : *8 points*

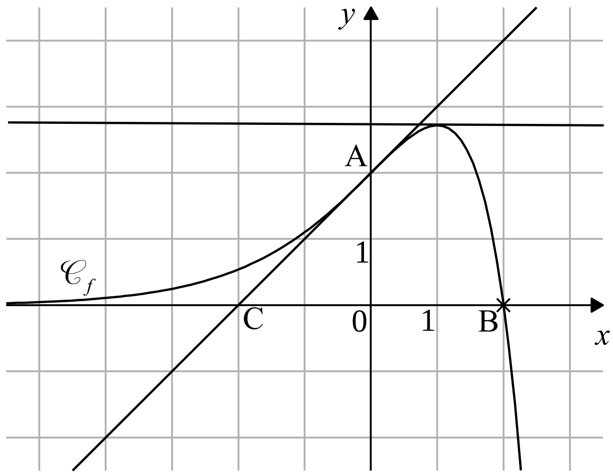
1. Dans un plan muni d'un repère, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. On a placé les points A (0 ; 2), B (2 ; 0) et C (–2 ; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- le point B appartient à $\mathscr{C}_f$;

- la droite (AC) est tangente en à $\mathscr{C}_f$;

- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique (*et donc sans justifier*) :

a. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

$f(0) = 2$ et de $f'(1) = 0$.

b. Donner une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.

$y = x + 2$.

c. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f semble convexe et celui sur lequel elle semble concave.

f semble convexe sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et concave sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Dans cette question, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lu graphiquement dans la question 1.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x$.

a. Calculer les valeurs de $f(0)$ et de $f'(1)$.

$f(0) = (2 - 0)e^0 = 2$.

$f = uv$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$,

donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

Donc $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$.

Donc $f'(1) = (1 - 1)e^1 = 0$.

b. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1$.

$\mathscr{T} : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = 1(x - 0) + 2 = x + 2$.

c. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).

$f'(x) = (1 - x)e^x$. Comme $e^x > 0$, f' est du signe de $1 - x$, qui affine avec coefficient directeur négatif, s'annulant en 1, donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

d. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$f' = uv$ avec $u(x) = 1 - x$ et $v(x) = e^x$,

donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

Donc $f'' = u'v + uv'$, soit $f''(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$.

e. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

f'' est du signe de $-x$, c'est-à-dire positif sur $]-\infty\,;\,0]$ et négatif sur $[0\,;\,+\infty[$, donc f est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

f. Préciser si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion. Si oui, que peut-on dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point.

f'' s'annule en changeant de signe en 0, $\mathscr{C}_f$ admet donc un point d'inflexion en $x = 0$. À cet endroit, la tangente traverse la courbe.

<u>Exercice 1 :</u> *6 points*
<u>PARTIE A :</u>

0,5 pt/question

<u>PARTIE B :</u>

1. **a.** 1 pt

b. 1pt

2. 1,5 pt

<u>Exercice 2 :</u> *7 points*
1. 1 pt

2. 1 pt

3. 2 pts

4. **a.** 1 pt

b. 0,5 pt

5. **a.** 0,5 pt

b. 1 pt

<u>Exercice 3 :</u> *8 points*

1. **a.** 1 pt (0,5/réponse)

b. 0,5 pt

c. 0,5 pt

2. **a.** 1 pt

b. 1 pt

c. 1,5 pt

d. 1 pt

e. 1 pt

f. 0,5 pt