

Nom :
Prénom :

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Sujet A
30 minutes

Spé math TG 2
Sur 15 points

Dans tout le contrôle, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près lorsque c'est nécessaire.

Exercice 1 8 points

À l'arrivée d'un train Paris-Toulon dont le départ a eu lieu à 6h52 du matin, on demande à 12 passagers tirés au hasard s'ils ont dormi ou non durant le voyage et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant dormi parmi eux-elles.

Pour un train partant à cette heure, on considère que la probabilité qu'un passager s'endorme est 0,68.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (tirer 12 personnes au hasard et voir si elles ont dormi), elle suit donc une loi binomiale. Ses paramètres sont $n = 12$ et $p = 0,68$.

2. Calculer, à l'aide de la formule, $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{12}{8} 0,68^8 0,32^4 \approx 0,24.$$

3. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité que moins de 9 personnes se soient endormies.

$$P(X < 9) = P(X \leq 8) \approx 0,57$$

4. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'au moins 10 personnes se soient endormies.

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 0,21$$

5. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X et interpréter l'espérance.

$$E(X) = np = 8,16 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{8,16 \times 0,32} \approx 1,62.$$

$E(X) = 8,16$ signifie que, sur un grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire, en moyenne 8,16 personnes se sont endormies.

Exercice 2 4 points

En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2 %.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage de plusieurs personnes dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont les 1250 places ont été réservées, il est prévu 30 places pouvant accueillir des personnes en fauteuil roulant.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant ?

On considère donc le choix des 1250 personnes ayant réservé comme un tirage au hasard de 1250 personnes (avec remise). Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes en fauteuil roulant. X est donc une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 1250$ et $p = 0,02$.

On cherche $P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) \approx 0,13$.

Il y a donc une probabilité de 13 % qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant.

Exercice 3 3 points

Soit Y qui suit la loi $\mathcal{B}(200 ; 0,3)$.

Ci dessous un extrait du tableau des valeurs de $P(Y \leq k)$:

k	...	44	45	46	47	48	49	50	...	70	71	72	73	74	75	...
$P(Y \leq k)$	...	0,007	0,011	0,017	0,025	0,036	0,051	0,070	...	0,946	0,960	0,972	0,980	0,986	0,991	...

Il n'est demandé aucune justification dans cet exercice.

1. À l'aide du tableau, déterminer un intervalle de fluctuation au risque de 5 % associé à Y .

D'après le tableau ci-dessus, on peut par exemple prendre $I = [48 ; 73]$.

En effet, $P(I) \approx 0,98 - 0,025 = 0,965 > 0,95$.

2. À l'aide du tableau, déterminer l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 % associé à Y .

D'après le tableau ci-dessus, $J = [49 ; 71]$.

Nom :
Prénom :

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES
Sujet B
30 minutes

Spé math TG 2
Sur 15 points

Exercice 1 8 points

À l'arrivée d'un train Paris-Toulon dont le départ a eu lieu à 7h07 du matin, on demande à 10 passagers tirés au hasard s'ils ont dormi ou non durant le voyage et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant dormi parmi eux-elles.

Pour un train partant à cette heure, on considère que la probabilité qu'un passager s'endorme est 0,68.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli (tirer 10 personnes au hasard et voir si elles ont dormi), elle suit donc une loi binomiale. Ses paramètres sont $n = 10$ et $p = 0,68$.

2. Calculer, à l'aide de la formule, $P(X = 8)$.

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0,68^8 0,32^2 \approx 0,21.$$

3. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité que moins de 8 personnes se soient endormies.

$$P(X < 8) = P(X \leq 7) \approx 0,67$$

4. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'au moins 9 personnes se soient endormies.

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) \approx 0,12$$

5. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X et interpréter l'espérance.

$$E(X) = np = 6,8 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6,8 \times 0,32} \approx 1,48.$$

$E(X) = 6,8$ signifie que, sur un grand nombre de répétitions de cette expérience aléatoire, en moyenne 6,8 personnes se sont endormies.

Exercice 2 4 points

En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2 %.

On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage de plusieurs personnes dans cette population à un tirage avec remise.

Dans un train, dont les 1350 places ont été réservées, il est prévu 35 places pouvant accueillir des personnes en fauteuil roulant.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant ?

On considère donc le choix des 1350 personnes ayant réservé comme un tirage au hasard de 1350 personnes (avec remise). Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes en fauteuil roulant. X est donc une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 1350$ et $p = 0,02$.

$$\text{On cherche } P(X > 35) = 1 - P(X \leq 35) \approx 0,05.$$

Il y a donc une probabilité de 5 % qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant.

Exercice 3 3 points

Soit Y qui suit la loi $\mathcal{B}(200 ; 0,3)$.

Ci dessous un extrait du tableau des valeurs de $P(Y \leq k)$:

k	...	44	45	46	47	48	49	50	...	70	71	72	73	74	75	...
$P(Y \leq k)$	...	0,007	0,011	0,017	0,025	0,036	0,051	0,070	...	0,946	0,960	0,972	0,980	0,986	0,991	...

Il n'est demandé aucune justification dans cet exercice.

1. À l'aide du tableau, déterminer un intervalle de fluctuation au risque de 10 % associé à Y .

D'après le tableau ci-dessus, on peut par exemple prendre $I = [48 ; 73]$.

En effet, $P(I) \approx 0,98 - 0,025 = 0,965 > 0,9$.

2. À l'aide du tableau, déterminer l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à Y .

D'après le tableau ci-dessus, $J = [48 ; 73]$.