COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Un peu d'histoire :

Des propriétés arithmétiques du Triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiques indiennes et chinoises. La combinatoire était un objet de prédilection des récréations mathématiques dès l'Antiquité et est encore présente chez des arithméticiens du XIXe siècle (Lucas, Delannoy, Laisant). Il est par ailleurs pertinent de souligner le développement récent des « mathématiques discrètes », motivé notamment par l'informatique et l'intelligence artificielle.

Pour prendre un bon départ, construire des tableaux : lien ou

I. Ensembles et sous-ensembles :

1°) Définitions :

Définitions :

Un **ensemble** E est une collections d'objets **distincts** (appelés éléments).

L'objet x est un élément de E se note : « $x \in$ E ». « y n'est pas élément de E » se note : « $y \notin$ E ».

Un ensemble peut être désigné par son nom ou par la liste de ses éléments entre accolades.

L'ensemble ne contenant aucun élément est l'**ensemble vide**, noté $\varnothing$.

Un ensemble à un élément est appelé **singleton**, un ensemble à deux éléments une **paire.**

Remarques :

L'ordre n'intervient pas : $\{a\ ;\ b\} = \{b\ ;\ a\}$ et il n'y a pas de répétition d'un élément : $\{a\ ;\ a\} = \{a\}$.

Exemples :

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, il a une infinité d'éléments, $\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ldots\}$.

Si E = $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ alors E est un ensemble à trois éléments. On peut aussi écrire E = $\{c\ ;\ a\ ;\ b\}$...

$\{\alpha\}$ est un singleton dont le seul élément est α, $\alpha \in \{\alpha\}$.

Définitions :

On dit que F est une **partie** de E (ou **sous-ensemble** de E) si F est constitué d'éléments de E.

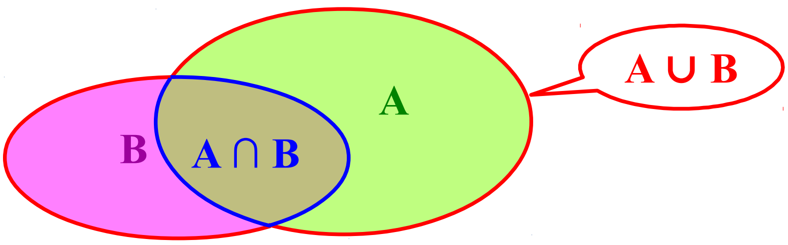
On écrit F $\subset$ E et on lit : « F est inclus dans E ». G $\not\subset$ E signifie qu'au moins un élément de G n'est pas élément de E (G n'est pas inclus dans E).

A $\cup$ B (se lit « A union B ») est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A **ou** dans B (donc dans au moins un des deux).

A $\cap$ B (se lit « A inter B ») est l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A **et** dans B (donc communs aux deux).

Si deux ensembles A et B n'ont aucun élément commun, on dit qu'ils sont **disjoints** : A $\cap$ B = $\varnothing$.

Illustration : diagramme de Venn

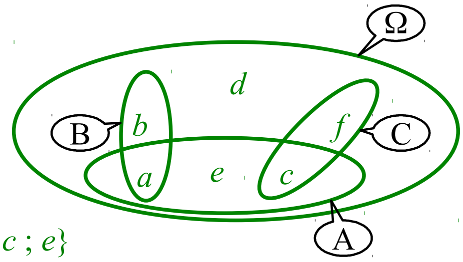


Exemples :

ℕ (ensemble des entiers naturels) est un sous ensemble de ℤ (ensemble des entiers relatifs) : ℕ ⊂ ℤ. On a aussi : ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ.

Soient Ω, A, B et C les ensembles suivants :

$\Omega = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$, $A = \{a ; c ; e\}$, $B =\{a ; b\}$, $C =\{c ; f\}$.



Quelques exemples :

$a \in A$ $\{a\} \subset A$ $b \notin A$ $A \subset \Omega$ $B \not\subset A$

B et C sont disjoints $A \cap B = \{a\}$ $A \cup B = \{a ; b ; c ; e\}$

Programme :

On peut écrire un programme qui écrit toutes les paires d'un ensemble E (ayant un nombre fini d'éléments) :

```
def paires(E):
    listepaires=[]
    listetemp=[]
    for i in range(len(E)):
        for j in range (i+1,len(E)):
            listetemp.append(E[i])
            listetemp.append(E[j])
            listepaires.append(listetemp)
            listetemp=[]
    return listepaires
```

Dont voici le retour lorsqu'on saisit paires ([1,2,3,4]):

```
>>> paires([1,2,3,4])
[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]
```

On obtient toutes les paires possibles d'éléments de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

2°) Produit cartésien :

Définition :

Si E et F sont deux ensembles, le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x ; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque :

Un couple est aussi appelé un 2-uplet ou une 2-liste, le couple $(x ; y)$ n'est pas le même que $(y ; x)$.

L'ensemble $E \times E$ peut se noté aussi E^2.

Exemple :

Soient A et B les ensembles suivants : $A = \{a ; c ; e\}$ et $B =\{a ; b\}$.

Alors $A \times B = \{(a ; a) ; (a ; b) ; (c ; a) ; (c ; b) ; (e ; a) ; (e ; b)\}$

et $B^2 = \{(a ; a) ; (a ; b) ; (b ; a) ; (b ; b)\}$

Programme :

On peut écrire un programme Python qui affiche l'ensemble des éléments de $E \times F$:

```
def produit(E,F):
    listeproduit=[]
    listetemp=[]
    for i in range(len(E)):
        for j in range(len(F)):
            listetemp.append(E[i])
            listetemp.append(F[j])
            listeproduit.append(listetemp)
            listetemp=[]
    return listeproduit
```

Dont voici le retour lorsqu'on saisit produit([1,2,3,4],[1,6]):

```
>>> produit([1,2,3,4],[1,6])
[[1, 1], [1, 6], [2, 1], [2, 6], [3, 1], [3, 6], [4, 1], [4, 6]]
```

Définition :

On généralise la définition au **produit cartésien de *n* ensembles** $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$: c'est l'ensemble des ***n*-uplets** (ou n-listes) $(x_1 ; x_2 ; \ldots x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1; 2 ; \ldots ; n\}$.

Le produit cartésien d'un ensemble A par lui-même n fois se note A^n.

Remarque :

Un 3-uplet est aussi appelé **triplet**.

Exemple :

Soient A, B et C les ensembles suivants : $A = \{a\,;\,c\,;\,e\}$ et $B = \{a\,;\,b\}$ et $C = \{c\,;\,f\}$.

Alors $A \times B \times C = \{(a\,;\,a\,;\,c)\,;\,(a\,;\,a\,;\,f)\,;\,(a\,;\,b\,;\,c)\,;\,(a\,;\,b\,;\,f)\,;\,(c\,;\,a\,;\,c)\,;\,(c\,;\,a\,;\,f)\,;\,(c\,;\,b\,;\,c)\,;\,(c\,;\,b\,;\,f)\,;\,(e\,;\,a\,;\,c)\,;\,(e\,;\,a\,;\,f)\,;\,(e\,;\,b\,;\,c)\,;\,(e\,;\,b\,;\,f)\}$

$B^3 = \{(a\,;\,a\,;\,a)\,;\,(a\,;\,a\,;\,b)\,;\,(a\,;\,b\,;\,a)\,;\,(a\,;\,b\,;\,b)\,;\,(b\,;\,a\,;\,a)\,;\,(b\,;\,a\,;\,b)\,;\,(b\,;\,b\,;\,a)\,;\,(b\,;\,b\,;\,b)\}$

Remarque :

On peut imaginer un arbre pour s'aider à trouver le produit cartésien d'ensembles.

Voir méthodes 1 et 2 p 339 puis, pour s'entraîner : lien 1 ou lien 2 ou

II. Dénombrement :

1°) Cardinal d'un ensemble fini :

Définition :

Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E et se note card (E).

Exemple :

Soient A et B les ensembles suivants : $A = \{a\,;\,c\,;\,e\}$ et $B = \{a\,;\,b\}$.

Alors, card (A) = 3 et card (B) = 2.

Remarque :

Card (∅) = 0.

Propriété (principe additif) :

Soient $E_1\,;\,E_2\,;\,\ldots\,;\,E_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints (n entier naturel, $n \geqslant 2$).

Alors $\text{card}\,(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \text{card}\,(E_1) + \text{card}\,(E_2) + \ldots + \text{card}\,(E_n)$.

Propriété (principe multiplicatif) :

Soient $E_1\,;\,E_2\,;\,\ldots\,;\,E_n$ n ensembles finis (n entier naturel, $n \geqslant 2$).

Alors $\text{card}\,(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = \text{card}\,(E_1) \times \text{card}\,(E_2) \times \ldots \times \text{card}\,(E_n)$.

2°) Cas se ramenant à des tirages successifs, l'ordre prévaut :

a) Tirages successifs avec remise : ordre + répétition :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

On cherche à dénombrer le nombre d'éléments (k-uplets) de E^k. On utilise la deuxième propriété du ***II.* 1°)**.

Propriété :

Le nombre de k-uplets différents de E est n^k.

Exemple :

Une application demande de saisir un code à 4 caractères composé de chiffres ou de lettres. Combien de code différents existe-t-il ?

Soit E l'ensemble composé des 26 lettres et 10 chiffres. Il faut donc trouver le nombre de quadruplets (ou 4-uplets) de E, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E^4, et il y en a $26^4 = 456\,976$.

b) Tirages successifs sans remise : ordre + pas de répétition

Définition :

Soit n un entier naturel. On appelle « factorielle n », qui se note $n\,!$, le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n. On a donc $n\,! = n(n-1)(n-2) \ldots 3\times2\times1$.

Exemples :

$3\,! = 3\times2\times1 = 6$.

Remarques :

Par convention $0\,! = 1$

Sur la calculatrice, on trouve « ! » dans le menu « math », onglet « PROB », ligne 4.

Propriété :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant n$.

Le nombre de k-uplets **d'éléments distincts** de E est $n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+2)(n-k+1) = \dfrac{n\,!}{(n-k)\,!}$.

Preuve :

On peut ramener cette situation au fait de disposer k cases (numérotées) des boules (numérotées aussi) issues d'un sac en contenant n (une boule par case). On doit d'abord compléter la première case, et pour cela on a n boules possibles. Pour la deuxième case, on n'a plus que $n-1$ boules possibles, pour la troisième, il ne reste plus que $n-2$ boules … et ainsi de suite jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ case pour laquelle il ne reste plus que $n-k+1$ boules.

Le nombre de possibilités est donc de $n(n-1)(n-2) \ldots \times(n-k+1) = \dfrac{n\,!}{(n-k)\,!}$.

Cas particulier : si $k = n$

Un n-uplet de E s'appelle une permutation (c'est une façon d'ordonner les éléments de E).

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $n\,!$.

Exemple :

Les permutations de $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$ sont : $(a\,;\,b\,;\,c)$; $(a\,;\,c\,;\,b)$; $(b\,;\,a\,;\,c)$; $(b\,;\,c\,;\,a)$; $(c\,;\,a\,;\,b)$ et $(c\,;\,b\,;\,a)$.

Exemple :

Dans une course hippique il y a 15 chevaux au départ. Combien de quintés différents sont possibles ?

On cherche le nombre de 5-uplets d'un ensemble à 15 éléments. Il y en a donc $\dfrac{15\,!}{10\,!} = 360\,360$.

3°) Cas se ramenant à des tirages simultanés : pas d'ordre + pas de répétition :

Définition :

On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments, une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments. Le nombres de telles combinaisons est noté $\dbinom{n}{p}$ et se lit p parmi n.

Remarque :

$\dbinom{n}{p}$ s'appelle aussi un coefficient binomial.

On peut considérer une partie comme un p-uplet dans lequel l'ordre n'a pas d'importance.

Propriété :

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!\;p\,!}.$$

Preuve :

Nous avons vu plus haut qu'il y avait $\frac{n!}{(n-p)!}$ p-uplets d'éléments d'un ensemble à n éléments. Or, dans un p-uplets l'ordre importe, alors que dans une partie non. Le nombre de p-uplets pour chaque partie est le nombre de permutations d'un ensemble à p éléments, c'est-à-dire p !. Il faut donc diviser le nombre de p-uplets par p ! pour avoir le nombre de parties. CQFD.

Exemple :

Pour la même course hippique que plus haut, avec 15 chevaux au départ, le nombre de tiercé dans le désordre possible est $\binom{15}{3} = \frac{15!}{12!3!} = 455$.

Remarque :

À la calculatrice : $\binom{n}{k}$ (avec n et k connus) se tape n Combinaison k, où Combinaison se trouve dans le menu math, onglet PROB, ligne 3.

Exemple :

Voir la méthode 5 p 343, puis, pour s'entraîner : lien ou

4°) Nombre de parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble à *n* éléments :

Propriété :

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Preuve :

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Constituer une partie de E revient à regarder chacun de ses éléments et à choisir si on le met dans la partie ou non. Décidons d'attribuer le code 1 aux éléments qui sont dans la partie et le code 0 aux autres.

Compter le nombre de parties de E revient donc à compter le nombre de n-uplets de $\{0 ; 1\}$.

Si $A = \{0 ; 1\}$, on cherche donc card (A^n). Or card $(A^n) = (\text{card}(A))^n = 2^n$.

Remarque :

Le « code » n'ayant que des 0 est valable, l'ensemble vide est une partie de tout ensemble.

Exemple :

Dans une classe de 25 élèves, un professeur de mathématiques propose une activité qui peut se faire sur papier ou sur ordinateur. Chaque élève choisit librement de faire l'activité sur papier, et donc de rester dans la salle de classe, ou d'utiliser un ordinateur et de se rendre dans la salle informatique contiguë. De combien de façon différente les élèves peuvent-ils se répartir (le nom des élèves dans chaque classe compte, pas seulement leur nombre) ?

Pour répondre à cette question, il suffit de constituer un des groupes, les élèves restant étant forcément dans l'autre. Il y a donc $2^{25} = 33\,554\,432$ possibilités.

III. Propriétés des coefficients binomiaux :

1°) Valeurs évidentes :

- Par convention $\binom{0}{0} = 1$.
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

2°) Propriétés :

Propriété :

Le nombre total de combinaisons dans un ensemble à n éléments est $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

Preuve (exemplaire) :

D'après le ***II.* 4°)**, le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. Ceci correspond bien aux $\binom{n}{0}$ parties à 0 élément, plus les $\binom{n}{1}$ parties à 1 élément, plus les $\binom{n}{2}$ parties à 2 éléments, … plus les $\binom{n}{n}$ parties à n éléments, donc $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

Retrouver la démonstration complète en vidéo ici : lien ou

Propriété :

Symétrie des coefficients binomiaux :

pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$: $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

Preuve :

$\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments dans une ensemble à n éléments. Or, à chaque partie à k éléments que l'on prend, correspond une partie à $n-k$ éléments que l'on laisse. CQFD

Propriété :

Relation de Pascal : Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Preuve (exemplaire) :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}+\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(n-k)!\,(k+1)!}+\frac{n!\,(n-k)}{(n-k)!\,(k+1)!} \quad \text{(on réduit au même dénominateur)}$$

$$= \frac{n!\,[(k+1)+(n-k)]}{(n-k)!\,(k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(n-k)!\,(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Retrouver cette démonstrations expliquées en vidéo ici : lien ou ainsi qu'une autre permettant de donner du sens à cette égalité.

Exemples :

$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$; $\binom{20}{19} = \binom{20}{1} = 20$; $\binom{9}{4}+\binom{9}{5}=\binom{10}{5} = 252$.

3°) Le triangle de Pascal :

Le triangle de Pascal permet d'illustrer quelques propriété vues ci-dessus :

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5 +	10	10	5	1			
6	1	6	= 15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
…	1								1

À l'intersection de la ligne « n » et de la colonne « k », on lit $\binom{n}{k}$

Les valeurs évidentes $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

La relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ permet de compléter les autres cases.

Mise en évidence de la symétrie des coefficients.

En savoir pus sur le triangle de Pascal : lien ou

Pour continuer à vous entraîner : lien ou