CONTINUITÉ

<u>Histoire des maths :</u> Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Pour prendre un bon départ : lien ou (Chapitre 4, pour prendre un bon départ)

I. La continuité :

1°) Définition :

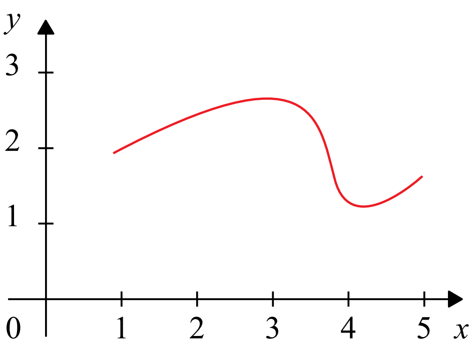
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- Une fonction f est continue en un réel a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

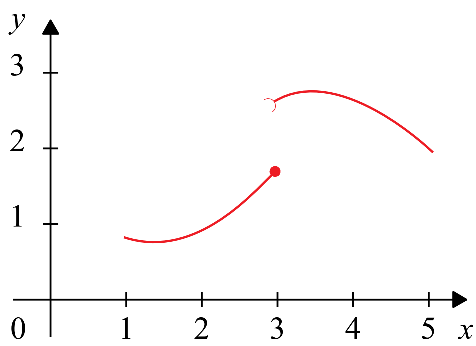
Intuitivement, on reconnaît qu'une fonction est continue sur un intervalle I lorsque sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon.

Exemple :



Cette fonction est continue sur $[1 ; 5]$.

Contre exemple :



Cette fonction n'a pas de limite en 3, elle est donc non continue sur $[1 ; 5]$.

En revanche, elle est continue sur $[1 ; 3]$ et sur $]3 ; 5]$.

Propriété :

Toutes les fonctions usuelles étudiées jusqu'à présent sont continues sur leur domaine de définition : les fonctions affines, puissances, polynômes, rationnelles, racine carrée, inverse, sinus, cosinus, exponentielle, valeur absolue.

Exemple :

La fonction racine carré est continue en 0. En effet $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Exemple :

Étude de la continuité d'une fonction en vidéo ici : lien ou

Pour s'entraîner : lien ou (Chapitre 4, exercices résolus)

2°) Dérivabilité et continuité :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a.

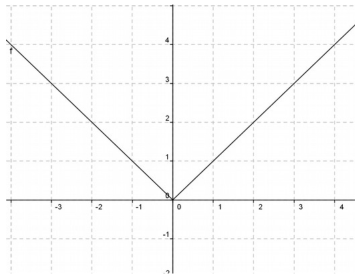
- si f est dérivable en a alors elle f est continue en a.
- si f est dérivable sur I alors elle f est continue sur I.

Démonstration :

$$f(x)-f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)$$

or f est dérivable en a ⇔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} x-a=0$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)-f(a)=f'(a)\times 0=0$ soit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$



Attention :

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Preuve :

$f(x) = |x|$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$

On rappelle que si $x \geqslant 0$, on a $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$ et si $x < 0$ $f(x) = -x$ et $f'(x) = -1$.

f est dérivable à droite et à gauche en 0 mais f n'est pas dérivable en 0.

3°) Propriétés d'opération et de composition :

Propriété :

Les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)$ = $\sqrt{\cos(x^2)+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par somme et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

II. Application aux suites :

1°) Image d'une suite :

Propriété :

Si la suite (u_n) converge vers L et si f est une fonction continue en L, alors la suite $f(u_n)$ converge vers $f(L)$.

Exemple :

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}+2$ et $v_n = u_n^2 = \left(\frac{1}{n}+2\right)^2$.

La suite (u_n) converge vers 2 et $v_n = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, (v_n) converge vers $f(2) = 4$.

2°) Cas des suites récurrentes :

Propriété :

Soit f une fonction continue, et (u_n) la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0.

Si la suite (u_n) est convergente vers une limite L, alors $L = f(L)$.

Attention :

La réciproque est fausse, l'équation $f(x) = x$ peut avoir des solutions sans que la suite soit convergente.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1\ 000$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 0{,}5\ u_n + 100$. On admet qu'elle converge (on pourrait le démontrer facilement en montrant qu'elle est décroissant minorée).

Il s'agit bien d'une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 0{,}5x + 100$ est une fonction affine, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers L, solution de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0{,}5x + 100 \Leftrightarrow x = 200$. (u_n) converge donc vers 200.

Remarques :

Les solutions de $f(x) = x$ sont appelés des points fixes de f.

Lorsque l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on garde celle qui correspond aux caractéristiques de la suite.

III. Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème (admis) :

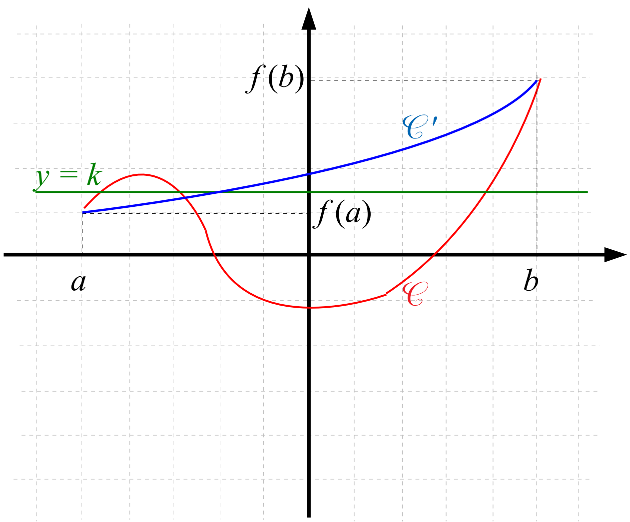
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Si a et b sont deux réels de I et si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$), alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque :

Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique également dans les cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts : $]a\ ;\ b[$, $[a\ ;\ b[$, ou $]a\ ;\ b]$.

Cette propriété s'étend aux cas où a et/ou b sont $\pm\infty$. On remplacera alors $f(a)$ par $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



Interprétation graphique :

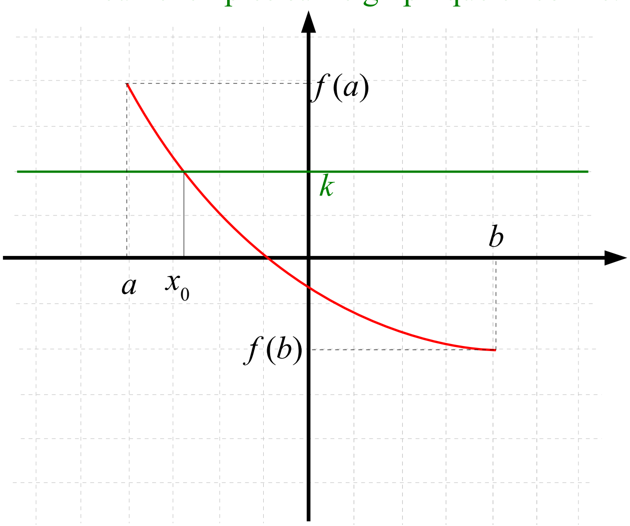
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme la fonction f est continue, la courbe $\mathscr{C}$ traverse la droite D d'équation $y = k$ en au moins un point.

L'équation $f(x) = k$ a donc au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Exemples :

Deux exemples sur le graphique ci-contre.



Attention :

Cette solution n'est pas forcément unique.

Corollaire : cas des fonctions continues monotones.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a\ ;\ b]$.

Démonstration de l'existence :

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel x_0 tel que $f(x_0) = k$.

Démonstration de l'unicité :

Soit x_1 un autre réel de $[a\ ;\ b]$; celui-ci est strictement supérieur ou inférieur à x_0, et comme f est strictement monotone $f(x_1)$ est strictement supérieur ou inférieur à $f(x_0)$, donc à k. $f(x_1)$ ne peut donc pas être égal à k, il n'y a donc pas d'autres solutions de l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Une application : $k = 0$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $[a\ ;\ b]$.

Exemple :

Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ a une solution unique α située entre 1 et 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x - 3$. Il s'agit d'une fonction continue (fonction polynôme).

D'autre part, on a $g'(x) = 3x^2 + 1$. Comme pour tout réel x on a $g'(x) > 0$, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin $g(1) = -1$ et $g(2) = 7$.

« Si $x \leqslant 1$, alors $g(x) \leqslant -1$ et x ne peut pas être solution de $g(x) = 0$.

Si $x \geqslant 2$, alors $g(x) \geqslant 7$ et x ne peut pas être solution de $g(x) = 0$. »

Par contre, comme g est continue et strictement croissante sur $[1\ ;\ 2]$, et comme $g(1)$ et $g(2)$ ont des signes opposés, il existe un unique réel α situé entre 1 et 2 tel que $g(\alpha) = 0$.

On peut visualiser à partir d'un tableau de variation :

x	$-\infty$		1		$\cdot$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+		+	
$f(x)$	↗		-1		0		7	↗	

Remarque :

On admet que les flèches des tableaux de variations traduisent la stricte monotonie et la continuité.

Remarque :

Cette propriété s'étend aussi aux cas où l'intervalle est de la forme $[a\ ;+\infty[$; $]-\infty\ ;\ b[$; $]a\ ;\ b]$ …

Remarque :

Les deux propriétés ci-dessus permettent de prouver que des solutions existent, mais ne les donnent pas.