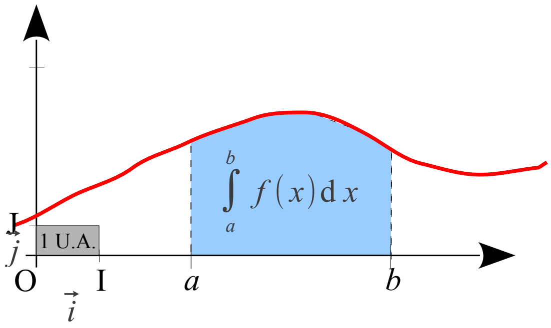
CALCUL INTÉGRAL

Un peu d'histoire : Le calcul infinitésimal, qui contient les fonctions usuelles, le calcul différentiel et intégral ont historiquement précédé la notion de limite qui en donnera des fondements rigoureux. On trouve des anticipations du calcul intégral chez Archimède (longueur du cercle, quadrature de la parabole, cubature des solides), Liu-Hui (volume d'un cylindre), Ibn al-Haytham (volume d'un paraboloïde) puis, bien plus tard, chez Grégoire de Saint-Vincent (méthode d'exhaustion) ou encore chez Galilée ou Cavalieri (méthode des indivisibles).

I. Définitions :

1°) Intégrale d'une fonction continue positive :



Définition :

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire (U.A.), de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarques :

- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit : « intégrale de a à b de $f(x)$ d x ».
- La variable x est appelée variable « muette ». On peut remplacer x par n'importe quelle autre variable :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\ \ldots$$

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors 1 U.A. = 6 cm^2.

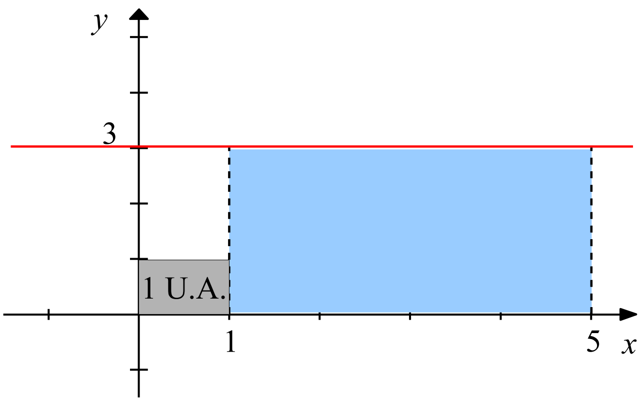
Exemple 1 :

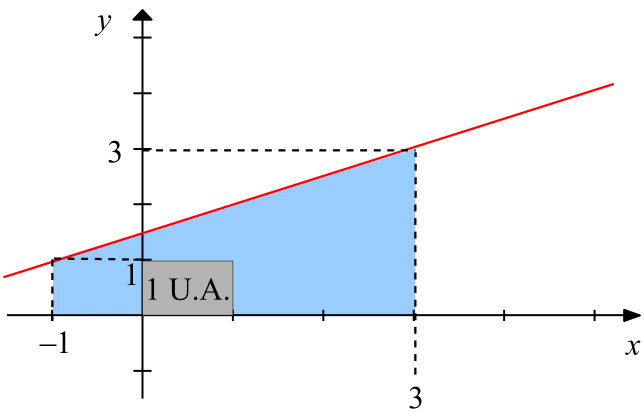
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3$.

$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire d'un rectangle de côtés 4 et 3.

On a donc

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 3\,\mathrm{d}x = 3(5-1) = 12 \text{ U.A.}.$$





Exemple 2 :

Calculons $\int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 1,5\right)\mathrm{d}x$. Il s'agit de calculer l'aire d'un trapèze de bases 1 et 3 et de hauteur 4 (3 – (–1)).

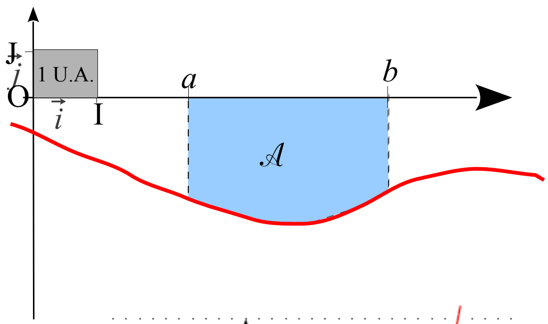
Nous obtenons donc $\int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 1{,}5\right)\mathrm{d}x = \frac{1+3}{2} \times 4$ = 8 U.A..

2°) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque :

Définition :

Soient f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ l'opposé du réel mesurant l'aire, en unités d'aire (U.A.), de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

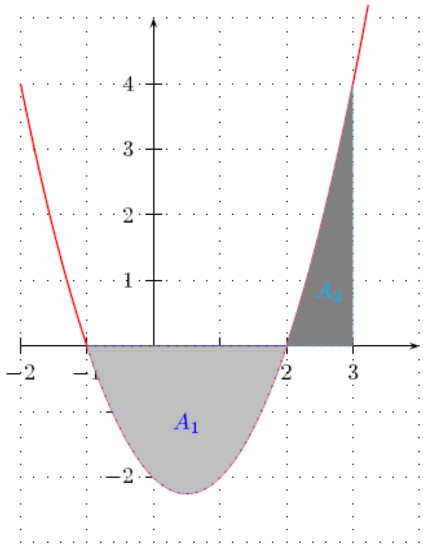


Exemple :

Sur le graphique ci-contre, $\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}$.

Définition :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a\,;\,b]$, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.



Exemple :

Sur le graphique ci-contre, $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = A_2 - A_1$.

II. Propriétés des intégrales :

1°) Linéarité :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

- $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Ce théorème permet en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe (de type polynôme par exemple) à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

Exemple :

Calcul de l'intégrale : $I = \int_{-2}^{2} (2+5x^3)\,dx$.

Aire d'un rectangle
de largeur 4 et de hauteur 2

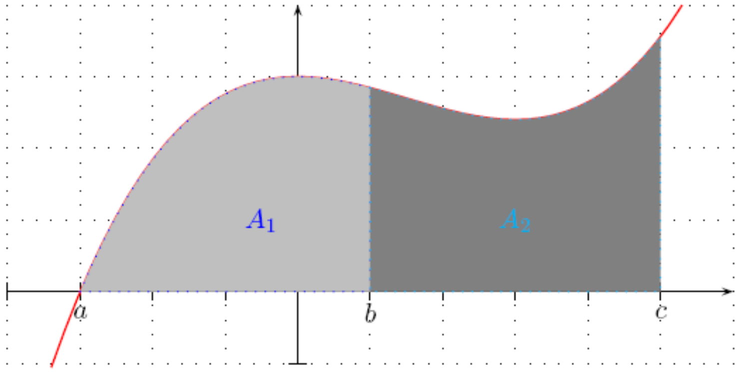
$I = \int_{-2}^{2} (2+5x^3)\,dx = \int_{-2}^{2} 2\,dx + 5\int_{-2}^{2} x^3\,dx = 4 \times 2 + 0 = 8$ U.A.

0 car la fonction cube est impaire

2°) Relation de Chasles :

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a\,;c]$ et $b \in [a\,;c]$, alors $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.



Interprétation graphique :

Sur le graphique ci-contre,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 + A_2.$$

Conséquence :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ donc } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3°) Intégrales et inégalités :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ (comme on est sur $[a\,;b]$, on a $a < b$).

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

En particulier, si, pour tout $x \in [a\,;b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Remarque :

La réciproque de ces propriétés est fausse. Par exemple, on peut avoir $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ sans avoir f positive sur $[a\,;b]$:

$\int_0^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x = 6 \geqslant 0$. Cependant, la fonction $x \longmapsto 2x - 1$ n'est pas positive sur $[0\,;3]$ (en 0 par exemple).

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ (comme on est sur $[a\,;b]$, on a $a < b$).

Si f est majorée par M sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

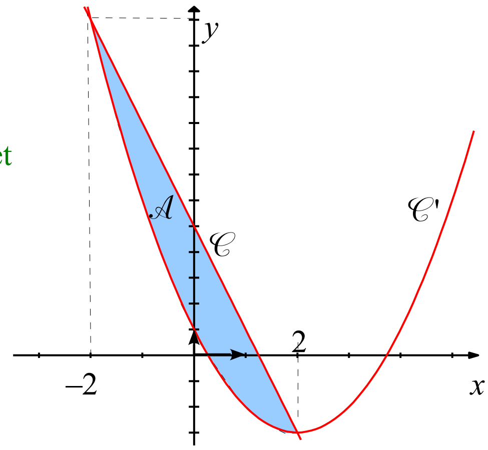
Si f est minorée par m sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant m(b-a)$.

4°) Aire du domaine situé entre deux courbes :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geqslant g(x)$. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

L'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathscr{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.



Exemple :

L'aire $\mathscr{A}$ ci-contre, comprise entre $\mathscr{C}$, représentant $f(x) = -4x + 5$ et $\mathscr{C}'$, représentant $g(x) = (x-2)^2 - 3$ est :

$\mathscr{A} = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

III. Intégrales et primitives :

1°) Primitive définie à l'aide d'une intégrale :

Théorème (fondamental) :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si a appartient à I, alors la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I (pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$).

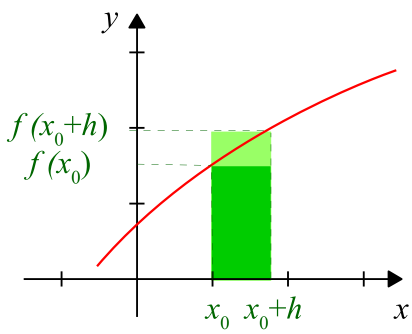
Preuve (exemplaire) :

Démontrons le théorème précédent dans le cas où f est continue et croissante sur I et admettons-le dans les autres cas.

Soit x_0 un réel de I et h un réel tel que $x_0 + h$ est dans I.

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- si $h > 0$; $f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0 + h)$ (car f est croissante), donc $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est compris entre les aires des deux rectangles de largeur h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$. Soit $f(x_0) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x_0 + h) \times h$.



Et comme $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0)$,

$$f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h) - F(x\,0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

- Si $h < 0$; $f(x_0 + h) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0)$ et donc $f(x_0) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x_0 + h) \times h$, (on a tout multiplié par h qui est négatif, donc l'inégalité change de sens. Comme f est positive, $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est négative.

et on établit que $f(x_0) \leqslant \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$

Or, comme f est continue en x_0, $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, donc, dans les deux cas, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

De plus, comme x_0 est une valeur quelconque de x, on peut en déduire que pour tout x, $F'(x) = f(x)$.

La preuve en vidéo (les 10 premières minutes) : lien ou

Remarque :

La fonction F définie ci-dessus est l'unique primitive de f s'annulant en a.

2°) Primitive d'une fonction continue :

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve :

Nous ne montrerons ce théorème que dans le cas où I = $[a\,;\,b]$ (avec a et b deux nombres réels) et f admet un minimum m sur $[a\,;\,b]$ et nous l'admettrons dans les autres cas.

Soit g telle que $g(x) = f(x) - m$. g est continue et positive sur $[a\,;\,b]$, donc, d'après le théorème fondamental, une primitive G de g sur $[a\,;\,b]$ est : $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc $F(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + mx$ est une primitive de f sur $[a\,;\,b]$ car $F'(x) = f(x)$.

Remarque :

Même si nous venons de voir que toute fonction continue admet une primitive, il en est certaines dont on ne connaît pas de primitive « explicite ». Par exemple, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$, mais on n'en connaît pas de primitive explicite.

3°) Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive :

Propriété :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur I.}$$

Preuve (exemplaire) :

Nous avons vu que $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, nous avons vu que les primitives de f différent entre elles d'une constante, donc quelle que soit G une autre primitive de f, $G = F + k$ où k est un réel.

Donc $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ quelle que soit F primitive de f.

La preuve en vidéo (à partir de 10 min 00) : lien ou

Remarque :

$F(b) - F(a)$ s'écrit aussi $\left[F(x)\right]_a^b$, qui se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

On obtient donc $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples :

- $\int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \frac{-2^3}{3}+4\times 2-\left(\frac{-(-2)^3}{3}+4\times(-2)\right) = \frac{32}{3}$.
- $\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{\frac{1}{2}}^{4} = \ln 4 - \ln \frac{1}{2} = \ln 4 + \ln 2 = 3 \ln 2$.

4°) Intégration par parties :

Théorème :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$, qui admettent des dérivées u' et v' continues.

Alors, $\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$.

Preuve (exemplaire) :

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, donc uv est une primitive de $u'v + uv'$,

et donc $\int_a^b u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b$

Soit $\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b$,

d'où $\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$.

La preuve en vidéo : lien ou

Exemple :

Calculons $\int_0^1 x e^x\,dx$. Il n'est pas aisé de trouver une primitive de xe^x, en revanche, si on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$, on a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

Or, $\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x e^x\,dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\,dx = e - 0 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.

Remarque :

Avec cette méthode, on peut donc trouver une primitive de xe^x en calculant $\int_0^x t e^t\,dt$ par exemple.

IV. Valeur moyenne d'une fonction :

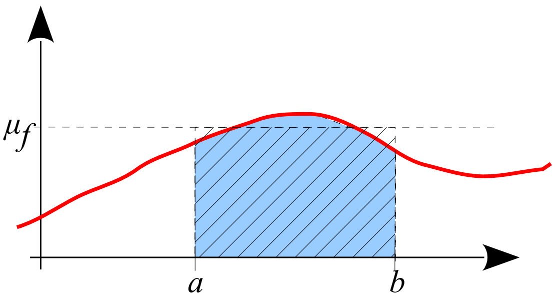
Définition :

Soit f une fonction continue. Si $a \neq b$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le nombre réel μ_f défini par

$$\mu_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Interprétation graphique :

La droite d'équation $y = \mu_f$ est la droite horizontale telle que l'aire des parties du plan délimitées par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'une part et les courbes d'équations $y = f(x)$ ( ) et $y = \mu_f$ ( ) soient de même valeur.



Exemple :

La valeur moyenne sur $[0\ ;\ 1]$ de la fonction carré est :

$$\mu = \frac{1}{1}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

Les aires hachurée et grisée sont donc égales.