Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **T STI2D**
Prénom : **Sujet A**
durée : 30 minutes **Sur 20**

Les calculatrices sont autorisées (pensez à vérifier vos résultats).

Une entreprise produit des appareils électroménagers. Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par : $C(x) = x^2 + 50x + 100$ pour $5 \leqslant x \leqslant 40$.

1. L'entreprise vend chaque appareil 100 €

a. Expliquer pourquoi le bénéfice horaire réalisé par la fabrication et la vente de x objets est égal à :

$B(x) = -x^2 + 50x - 100$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

Le bénéfice est égal aux recettes moins le coût. Les recettes sont ici de $R(x) = 100x$ puisque chacun des x appareils est vendu 100 €. On a donc

$$B(x) = R(x) - C(x) = 100x - (x^2 + 50x + 100) = 100x - x^2 - 50x - 100 = -x^2 + 50x - 100.$$

b. B' étant la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[5 ; 40]$, calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

$B'(x) = -2x + 50$. $B'(x) > 0$ revient à
$-2x + 50 > 0$
$-2x > -50$
$x < 25$

Donc B' est positive sur $[5 ; 25]$ et est négative sur $[25 ; 40]$

c. Dresser le tableau de variations de B sur l'intervalle $[5 ; 40]$.

$B(5) = -5^2 + 50\times5 - 100 = 125$; $B(25) = -25^2 + 50\times25 - 100 = 525$; $B(40) = -40^2 + 50\times40 - 100 = 300$.
On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	5		25		40
$B'(x)$		+	0	–	
$B(x)$	125	↗	525	↘	300

d. Quel est le nombre d'appareils à produire pour que le bénéfice horaire de l'entreprise soit maximal.

D'après le tableau ci-dessus, le bénéfice horaire est maximal lorsque 25 appareils sont produits en une heure. Le bénéfice est alors de 525 €/h.

2. Le coût unitaire de production d'un appareil lorsque x appareils sont produits est égal à : $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

a. Montrer que $f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2+50x+100}{x} = \frac{x^2}{x}+\frac{50x}{x}+\frac{100}{x} = x + 50 + \frac{100}{x}.$$

b. f' étant la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[5 ; 40]$, montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[5 ; 40]$.

$f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x} = x + 50 + 100\times\dfrac{1}{x}$,

donc $f'(x) = 1 + 100\times\dfrac{-1}{x^2} = 1 - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{x^2-100}{x^2} = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$ (en utilisant la factorisation à l'aide de la troisième identité remarquable.

On aurait aussi pu développer $\dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$ et constater qu'on retrouvait $1 - \dfrac{100}{x^2}$.

c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[5 ; 40]$ et dresser le tableau de variations de f.

Sur l'intervalle $[5 ; 40]$, $x^2 > 0$ et $x + 10 > 0$, f' est donc du signe de $x - 10$.
Or, $x - 10 > 0$ revient à $x > 10$, ce qui nous permet d'établir le tableau de variations suivant :

x	5		10		40
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	75	$\searrow$	70	$\nearrow$	92,5

Avec $f(5) = 5 + 50 + \dfrac{100}{5} = 75$; $f(10) = 10 + 50 + \dfrac{100}{10} = 70$ et $f(40) = 40 + 50 + \dfrac{100}{40} = 92{,}5$.

d. Pour quelle valeur de x le coût unitaire est-il minimal ? Préciser alors sa valeur.

D'après la question précédente, le coût unitaire est minimal lorsque $x = 10$, c'est-à-dire lorsque 10 appareils sont fabriqués par heure. Ce coût est alors de 70 € par appareil.