Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **T STI2D**
Prénom : **Sujet A**
durée : 1 heure **Sur 20**

Les calculatrices sont autorisées (pensez à vérifier vos résultats).

Exercice 1 : (*12 points*)

Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués est donné par : $C(x) = x^2 + 50x + 900$, pour $x \in [10 ; 60]$.

Partie A :

1. Quel est le coût de production de 20 meubles ?

$C(20) = 20^2 + 50\times20 + 900 = 2\,300$. 20 meubles coûtent 2 300 € à produire. **1 pt**

2. Quel est le coût de production par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles ?

$2\,300 \div 20 = 115$. Le coût unitaire de production de 20 meubles est de 115 €. **1 pt**

3. Soit $f(x)$ le coût unitaire pour x meubles fabriqués. Exprimer $f(x)$ en fonction de x pour tout x de $[10 ; 60]$.

$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2+50x+900}{x} = x + 50 + \frac{900}{x}$. **1 pt**

Partie B :

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[10 ; 60]$ par $f(x) = x + 50 + \frac{900}{x}$.

1. Justifier que $f'(x) = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$.

$f'(x) = 1 + 0 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2-900}{x^2} = \frac{(x-30)(x+30)}{x^2}$. (en utilisant la troisième identité remarquable pour factoriser $x^2 - 900$ qui peut aussi s'écrire $x^2 - 30^2$. **2 pts**

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[10 ; 60]$.

$x^2 > 0$ et sur l'intervalle $[10 ; 60]$ $x + 30 > 0$. f' est donc du signe de $x - 30$.

Étudions le signe de $x - 30$: $x - 30 > 0$ revient à $x > 30$. Ce qui nous permet d'en déduire le tableau de variations suivant :

x	10		30		60
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	150	↘	110	↗	125

2 pts

3. Reproduire et compléter le tableau suivant : **1 pt**

x	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$	150	125	115	111	110	112,5	115	118	125

4. Tracer la courbe représentative de f dans le repère donné en annexe.

Voir le graphique **1 pt**

Partie C :

Dans cette partie, la production est comprise entre 10 et 60 meubles.

1. Combien de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire soit minimal ?

D'après le tableau de variation de la partie précédente, c'est pour la fabrication de 30 meubles que le coût unitaire est minimal. Il est alors de 110 € par meuble. **1 pt**

2. Chaque meuble est vendu 115 €.

a. Construire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 115$ sur le graphique en annexe.

Voir le graphique. **0,5 pt**

b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

On trouve $x = 20$ et $x = 45$. Ce sont des valeurs qu'on retrouve d'ailleurs dans le tableau de valeurs. **0,5 pt**

c. En déduire l'intervalle de production pour lequel l'artisan réalise un bénéfice.

Pour que l'artisan réalise des bénéfices, il faut donc qu'il fabrique entre 21 et 44 meubles. **1 pt**

Exercice 2 : (*4 points*)

1. Donner une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + 3x^2 - 5x + 2$.

1,5 pt

$F(x) = \frac{x^6}{6} + 3\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 2x$. Donc $F(x) = \frac{x^6}{6} + x^3 - 2{,}5x^2 + 2x$ est une primitive de f.

2. La fonction F définie sur $]2\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{2x+1}{4x-2}$ est-elle une primitive de $f(x) = \frac{-8}{(4x-2)^2}$?

Pour vérifier cela, il nous faut dériver F pour voir si on retrouve f.

F est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = 4x - 2$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 4$. **2,5 pts**

Donc $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $F'(x) = \frac{2(4x-2)-4(2x+1)}{(4x-2)^2} = \frac{8x-4-8x-4}{(4x-2)^2} = \frac{-8}{(4x-2)^2} = f(x)$.

F est donc bien une primitive de f.

Exercice 3 : (*4 points*)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis au centième.

Le prix d'un produit subit 3 augmentations successives, respectivement de 30 %, 50 % et 25 %.

1. Calculer le taux d'évolution global du prix sur l'ensemble des 3 évolutions.

Ces trois taux d'augmentation correspondent respectivement aux coefficients multiplicateurs 1,3 ; 1,5 et 1,25. Le coefficient multiplicateur global est donc $1{,}3 \times 1{,}5 \times 1{,}25 \approx 2{,}44$. Le taux d'évolution global est donc d'environ 144 %. **2 pts**

2. Calculer le taux d'évolution moyen de ces 3 évolutions.

Le coefficient multiplicateur global étant de 2,44, le coefficient multiplicateur moyen sur ces 3 évolutions est de $2{,}44^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}35$. Le taux d'évolution moyen est donc d'environ 35 %. **2 pts**

Nom : **ANNEXE** **T STI2D**

Prénom : ***À rendre avec la copie***