Nom : **DEVOIR DE MATHÉMATIQUES** **T STI2D**

Prénom : **Sujet A**

durée : 30 minutes **Sur 20**

Les calculatrices sont autorisées (pensez à vérifier vos résultats).

Exercice 3 : (*3 points*)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $e^{2x} = e^{-3}$; **b.** $e^{x} = 0$; **c.** $e^{x} = 2$.

a. $2x = -3 \Leftrightarrow x = -1{,}5$

b. $S = \varnothing$ (car $e^{x} > 0$)

c. $x = \ln 2$

Exercice 2 : (*7 points*)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x + 2)e^{2x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 4x+2 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ par produit de limites.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 4x+2 = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ par croissances comparées (l'exponentielle l'emporte).}$$

2. a. Montrer que la dérivée f' de la fonction f est $f'(x) = (8x + 8)e^{2x}$.

f est de la forme uv avec $u(x) = 4x + 2$ et $v(x) = e^{2x}$, donc $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.

donc $f' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = 4e^{2x} + (4x + 2)\times 2e^{2x} = (4 + (4x + 2)\times 2)e^{2x} = (4 + 8x + 4)e^{2x} = (8x + 8)e^{2x}$.

b. Étudier le signe de f' et construire le tableau de variations complet de la fonction f.

$e^{2x} > 0$, donc f' est du signe de $8x + 8$. $8x + 8 > 0$ revient à $x > -1$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2e^{-2}$	↗	$+\infty$

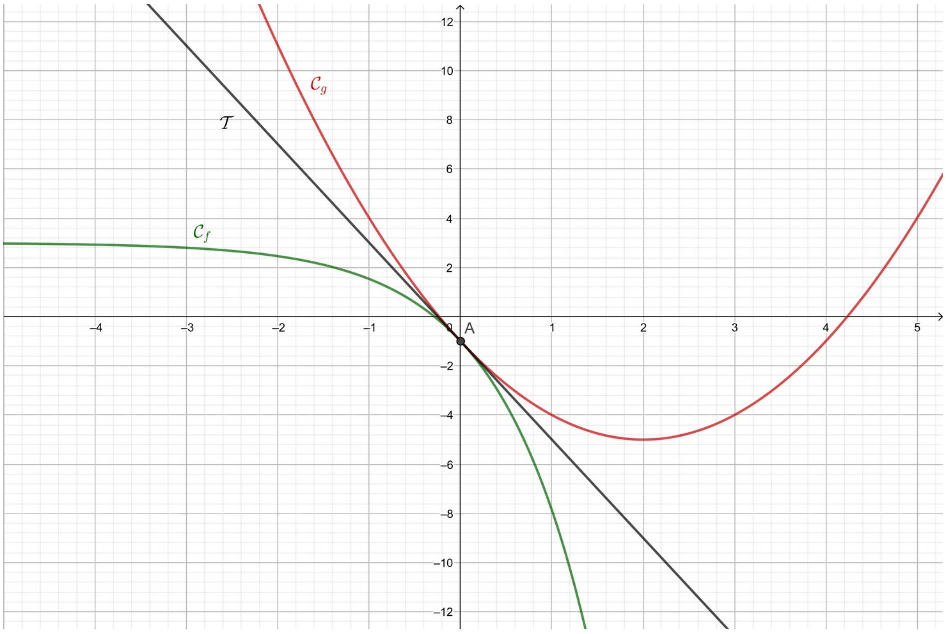
$f(-1) = (4\times(-1) + 2)e^{2\times(-1)} = -2e^{-2}$.

Exercice 3 : (*4 points*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + be^x$, où a et b sont deux nombres réels.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.

Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a + b = -1$.

$g(0) = 0 - 4\times0 - 1 = -1$. Comme $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont le point A d'abscisse 0 en commun, $g(0) = f(0) = -1$.
Donc $f(0) = a + be^0 = a + b = -1$.

2. On admet que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente $\mathscr{T}$ au point A.

a. Donner, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$ puis calculer $g'(0)$.

$g'(x) = 2x - 4$, donc $g'(0) = -4$.

b. En déduire la valeur de b, puis celle de a.

Comme $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont la même tangente en A, $f'(0) = g'(0) = -4$.
$f'(x) = be^x$, donc $f'(0) = b$, ce qui nous permet de déduire que $b = -4$.
Comme $a + b = -1$, $a - 4 = -1$, donc $a = 3$.
On a donc $f(x) = 3 - 4e^x$.