<u>Exercice ? :</u> (*6 points*)

<u>Question 1 :</u>

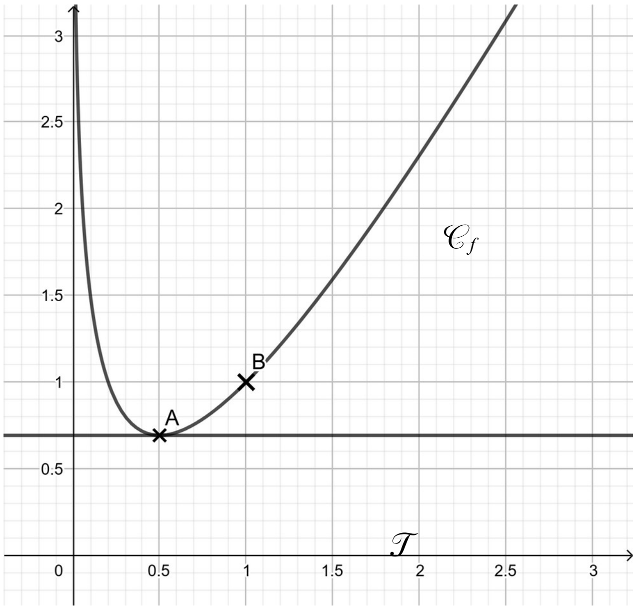
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ où a et b sont des nombres réels.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans le repère ci-contre.

On note A le point d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.

On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. La droite $\mathscr{T}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point B (1 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.



a. Donner la valeur de $f(1)$. En déduire une relation entre a et b.

Le point B (1 ; 1) appartient à la courbe, donc $f(1) = 1$. Or $f(1) = a\times 1 + b - \ln(1) = a + b$, donc $a + b = 1$.

b. Justifier que $f'(0,5) = 0$. En déduire la valeur de a.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0,5 est parallèle à l'axe des abscisses, elle a donc pour coefficient directeur 0, donc $f'(0,5) = 0$.

De plus, $f'(x) = a - \dfrac{1}{x}$, donc $f'(0,5) = a - \dfrac{1}{0,5} = a - 2$. Donc $a - 2 = 0$, d'où $a = 2$.

c. En déduire la valeur de b.

Comme $a + b = 1$, $2 + b = 1$, donc $b = -1$.

La fonction est donc $f(x) = 2x - 1 - \ln x$.

<u>Question 2 :</u>

Une entreprise achète une machine d'une valeur de 300 000 €. Cette machine perd de sa valeur au fil des années. Cette perte exprimée en euro, à l'instant t exprimé en année, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;15]$ par $f(t) = 300\,000\,(1 - e^{-0,09t})$.

Au bout de combien d'années (résultat arrondi à l'unité) la machine aura-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

La machine aura perdu la moitié de sa valeur quand elle ne vaudra plus que 150 000 €, on résout donc

$$
\begin{aligned}
f(t) = 150\,000 \quad &\Leftrightarrow 300\,000\,(1 - e^{-0,09t}) = 150\,000 \\
&\Leftrightarrow 1 - e^{-0,09t} = \frac{150000}{300000} \\
&\Leftrightarrow 1 - e^{-0,09t} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -e^{-0,09t} = -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow e^{-0,09t} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow\ -0{,}09t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow\ t = \frac{-\ln(2)}{-0{,}09} \approx 7{,}7$$

La machine aura perdu la moitié de sa valeur au bout d'environ 8 ans (puisqu'il faut arrondir à l'unité).

<u>Question 3 :</u>

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

$f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ en faisant figurer la valeur exacte de son extremum. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle.

Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$, f' est donc du signe de $2x - 1$.

Étude du signe de $2x - 1$: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$0{,}5$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Son minimum est $f(0{,}5) = 2\times0{,}5 - 1 - \ln(0{,}5) = -\ln(0{,}5) = \ln(2)$.

Pour les limites :

<u>en 0 :</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 2x-1 = -1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} 2x-1-\ln(x) = +\infty$ (par soustraction de limites)

<u>en $+\infty$:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-1 = +\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to \infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\}$$

donc $\lim\limits_{x\to \infty} 2x-1-\ln(x) = +\infty$ (par croissances comparées, qui permet de lever une forme indéterminée de la forme $\infty - \infty$).

Question 4 :

a. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}0434\, y = 0$.

Déterminer sur $[0\ ;\ +\infty[$ la solution P de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $y\,(0) = 6{,}75$.

(E) $\Leftrightarrow y' = -0{,}0434\, y$ et a donc une solution générale : $y\,(x) = k\mathrm{e}^{-0{,}0434x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Or, $y\,(0) = 6{,}75 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^{0} = 6{,}75 \Leftrightarrow k = 6{,}75$.

La solution cherchée est donc $P\,(x) = 6{,}75\mathrm{e}^{-0{,}0434x}$.

b. Un signal de puissance initiale $P\,(0) = 6{,}75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée de la fibre optique, est donnée par $P\,(x)$ où P est la fonction déterminée à la question **a.**

Montrer que la perte de puissance une fois que le signal a parcouru un kilomètre depuis l'entrée est d'environ 287 µW.

Au bout d'un kilomètre, la puissance du signal est de $P\,(1) = 6{,}75\mathrm{e}^{-0{,}0434}$ mW.

La perte de puissance est donc de $6{,}75 - 6{,}75\mathrm{e}^{-0{,}0434} \approx 0{,}0287$ mW = 287 µW.